

Сложное движение точки и твердого тела

До сих пор рассматривалось движение точки по отношению к одной системе координат, которую полагали неподвижной. В мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой.

Движение точки в этом случае называется *СЛОЖНЫМ*.

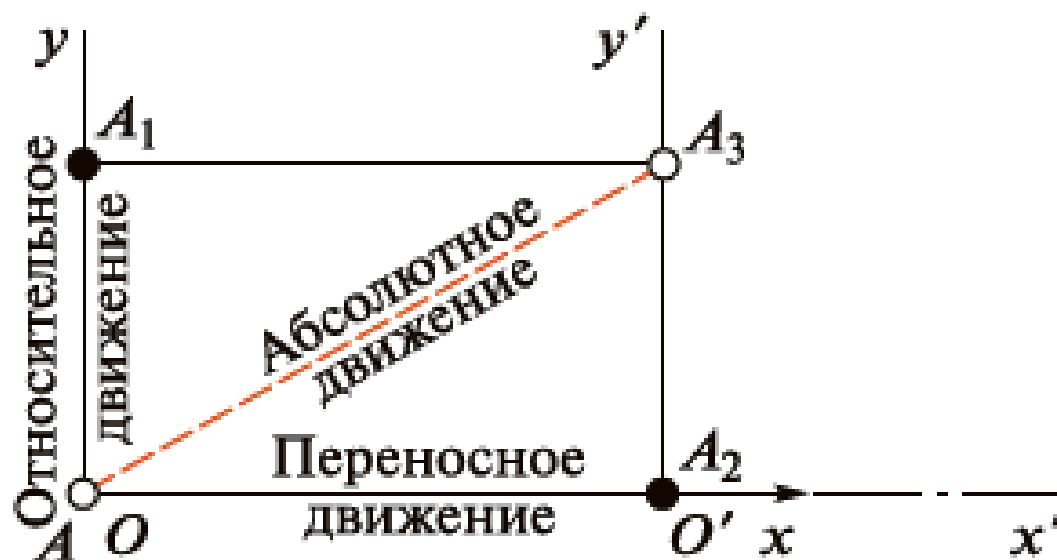
Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется *абсолютным*.

Движение точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительным*.

Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называется *переносным*.

Абсолютное движение точки является сложным и состоит из относительного и переносного движений.

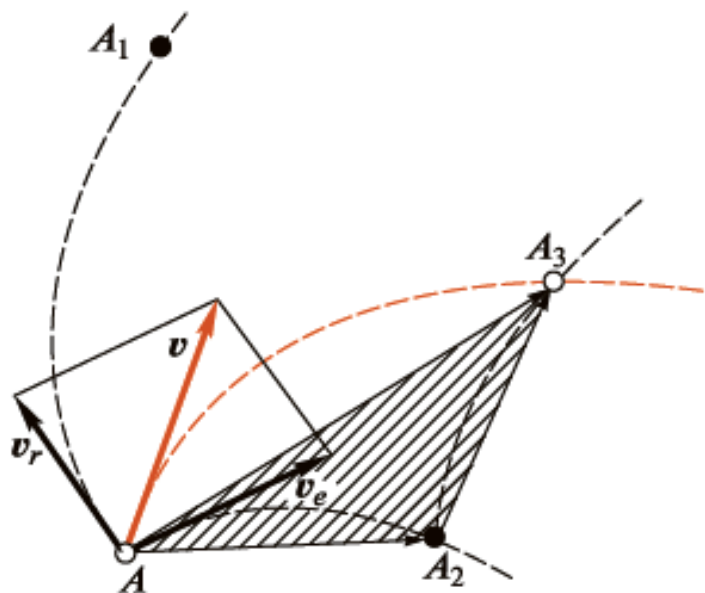
Пусть xOy – подвижная система координат, перемещающаяся в плоскости чертежа равномерно поступательно вдоль оси x ; точка A равномерно перемещается вверх по оси y . Если будет совершаться только относительное движение, то точка перейдет из положения A в положение A_1 . Если будет совершаться только переносное движение, то точка из положения A попадет в положение A_2 . Если же одновременно совершаются и относительное и переносное движения, то точка за этот же промежуток времени перейдет из положения A в положение A_3 .



Теорема о сложении скоростей

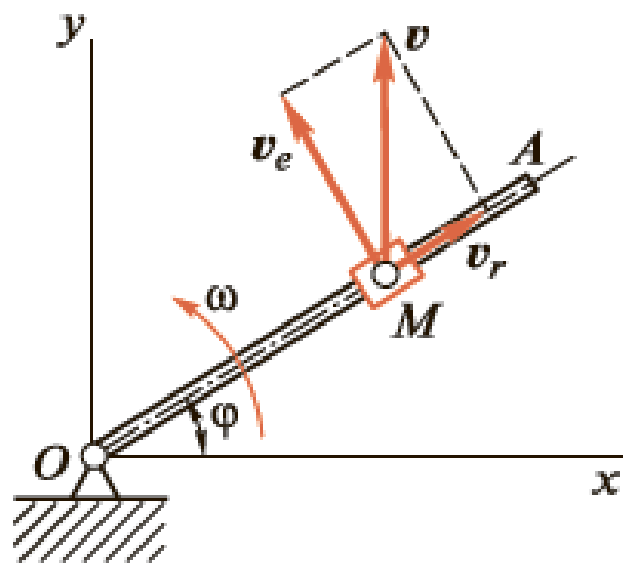
Скорость точки в абсолютном движении называется *абсолютной*. Скорость точки в относительном движении называется *относительной*. Скорость рассматриваемой точки, мысленно закрепленной в данный момент на подвижной системе координат, называется *переносной*. Связь между этими скоростями устанавливает теорема о сложении скоростей.

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.



$$v = v_e + v_r$$

где v — вектор абсолютной скорости; v_e — вектор переносной скорости; v_r — вектор относительной скорости.



Пример . Стержень OA (рис.) вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки O по закону $\varphi = t^2$. По стержню равноускоренно движется ползун M , удаляясь от точки O . Движение ползуна определяется уравнением

$$s = OM = 2 + 2t^2,$$

где s — в метрах, t — в секундах.

Найти абсолютную скорость ползуна в момент $t = 1$ с.

Решение. Выберем неподвижную систему координат xOy ; подвижной системой будем считать стержень. В этом случае относительным движением является движение ползуна M по стержню. Следовательно, относительная скорость направлена вдоль стержня и равна

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 4t.$$

В момент $t = 1$ с относительная скорость по модулю будет равна $v_{r1} = 4$ м/с.

Переносным движением является вращательное движение стержня OA с мысленно закрепленным на нем в данный момент ползуном, поэтому переносная скорость v_e ползуна направлена перпендикулярно стержню, причем ее значение определяется по формуле

$$v_e = \omega OM = \frac{d\varphi}{dt} OM.$$

Так как $OM = s = 2 + 2t^2$, а $\frac{d\varphi}{dt} = 2t$, то $v_e = 2t(2 + 2t^2)$.

Полагая $t = 1$ с, получим $v_{e1} = 8$ м/с.

Так как относительная и переносная скорости взаимно-перпендикулярны, а на основании теоремы о сложении скоростей $v = v_r + v_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Подставляя значения скоростей при $t = 1$ с, получим

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с.}$$

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоским, или **плоскопараллельным**, движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Примерами плоского движения являются движение шайбы по льду, колеса поезда по прямолинейному участку пути.

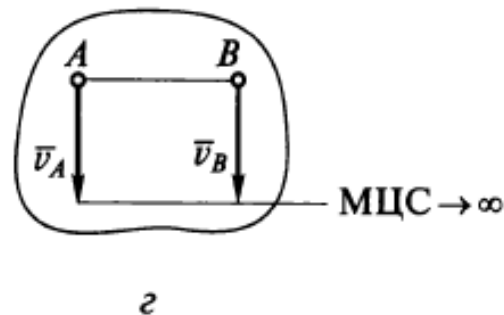
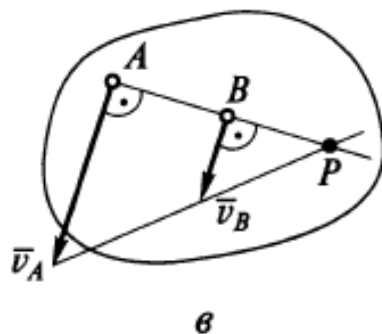
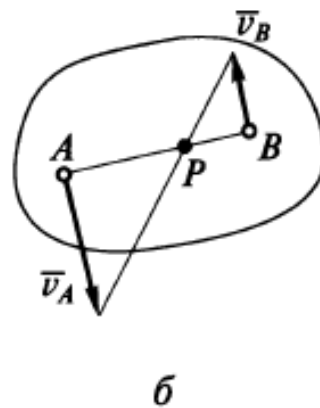
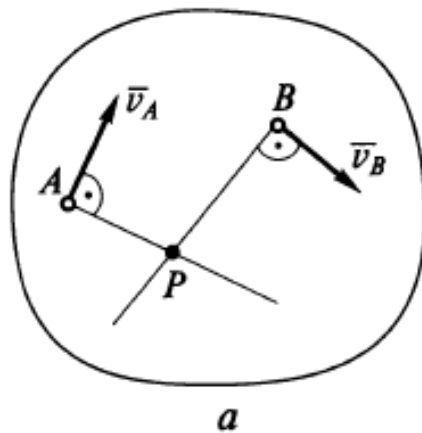
Плоское движение тела можно разложить на **поступательное** и **вращательное** относительно выбранного центра.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами:

- **методом мгновенных центров скоростей;**
- **методом разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.**

Мгновенный центр скоростей

Неизменно связанная с телом точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется **МГНОВЕННЫМ центром скоростей** (МЦС). Мгновенный центр скоростей находится в точке P на перпендикулярах к скоростям точек тела, опущенных из этих точек (рис. а). Различные случаи определения мгновенного центра скоростей показаны на рис. б-г.



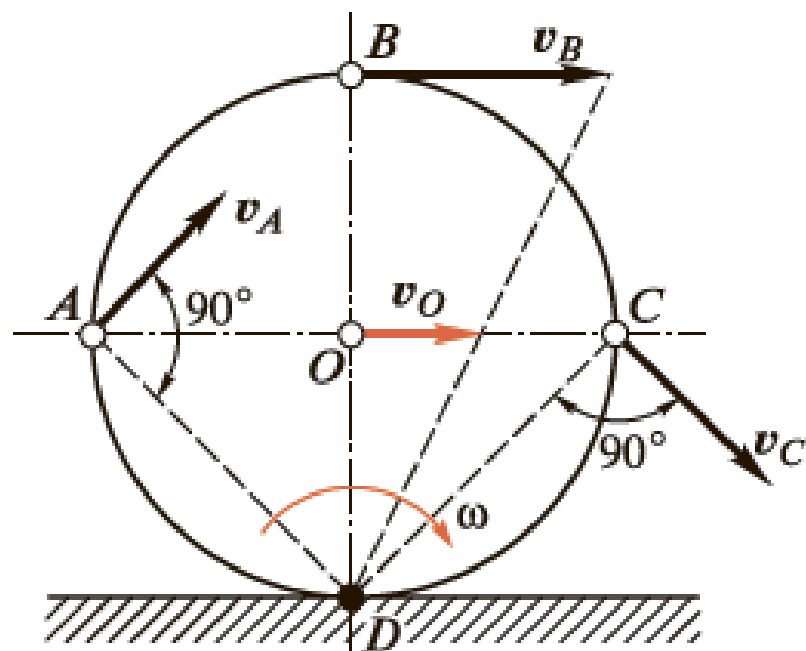
Пример. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу, причем скорость его центра O равна $v_O = 2$ м/с. Найти скорость концов вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение. По условию колесо катится без скольжения, поэтому скорость точки D касания колеса с рельсом равна нулю, следовательно, точка D — мгновенный центр скоростей колеса.

Зная скорость точки O , находим угловую скорость ω колеса:

$$\omega = \frac{v_O}{OD} = \frac{v_O}{R}.$$

На основании свойств мгновенного центра скоростей определим модули скоростей точек A , B и C колеса:

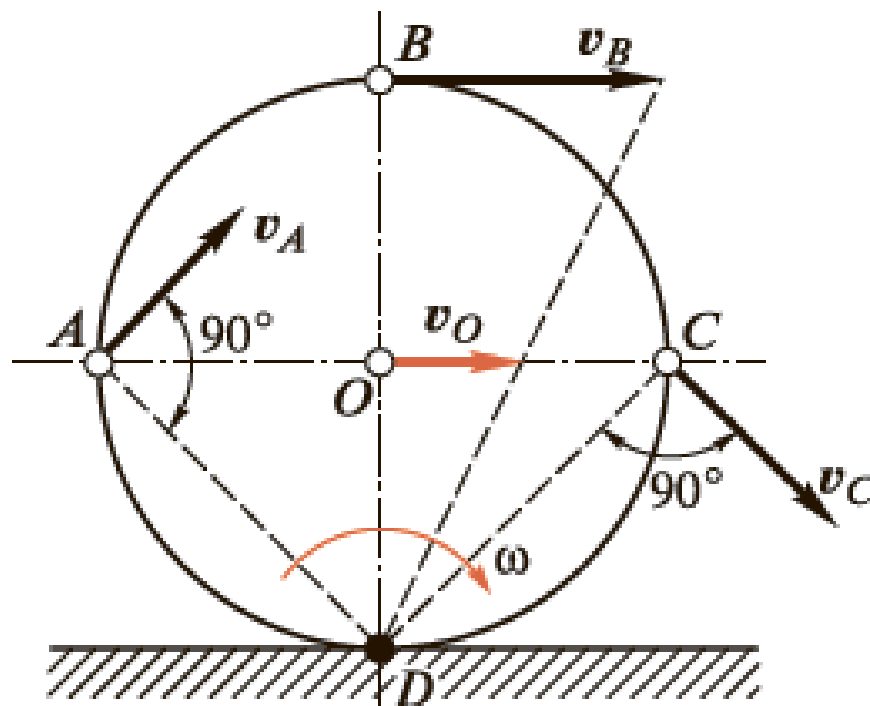


$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с};$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_O}{R} 2R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с};$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Направления векторов скоростей точек A , B и C перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки с мгновенным центром скоростей.



Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

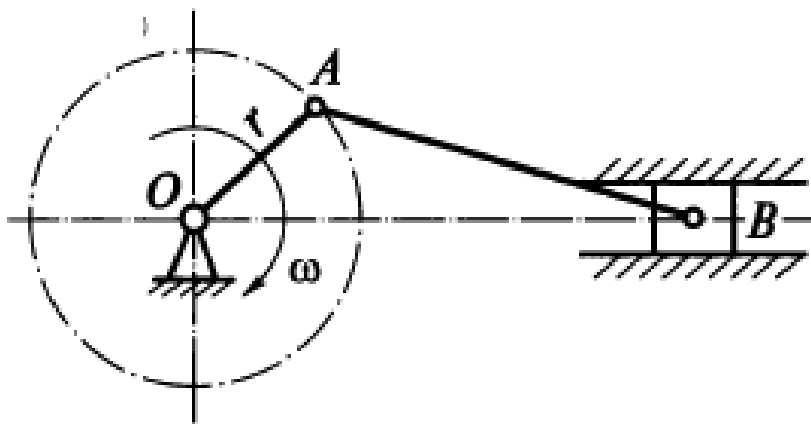
В машинах очень часто происходит преобразование одного движения в другое.

Например, в кривошипно-шатунном механизме кривошип совершает вращательное движение, которое преобразуется в поступательное – перемещение ползуна.

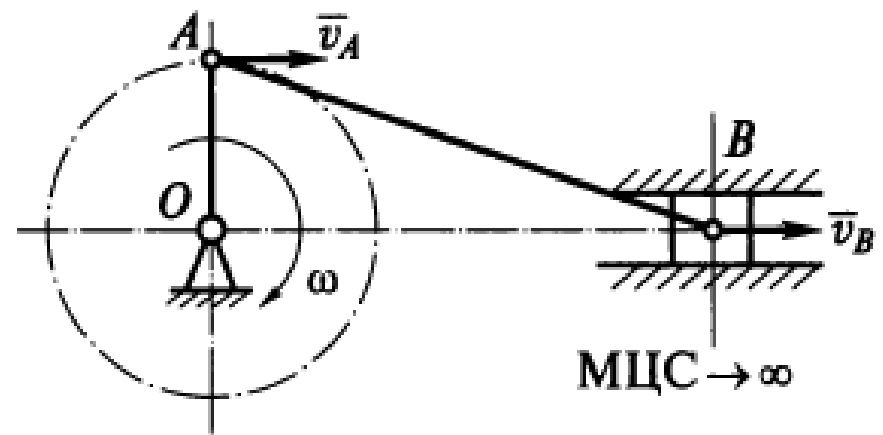
При решении практических задач бывает необходимо найти законы этого движения или скорости.

Пример

В кривошипно-шатунном механизме за один оборот кривошипа ползун проходит путь, равный 400 мм. Какой путь пройдет за это время точка A ? Где будет находиться мгновенный центр скоростей (МЦС) звена AB , когда кривошип OA займет вертикальное положение?



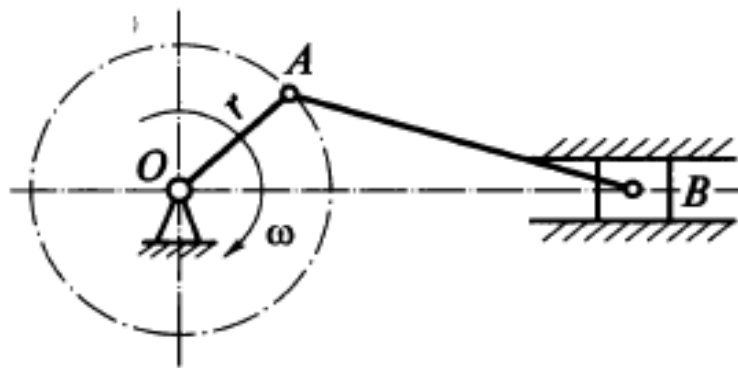
a



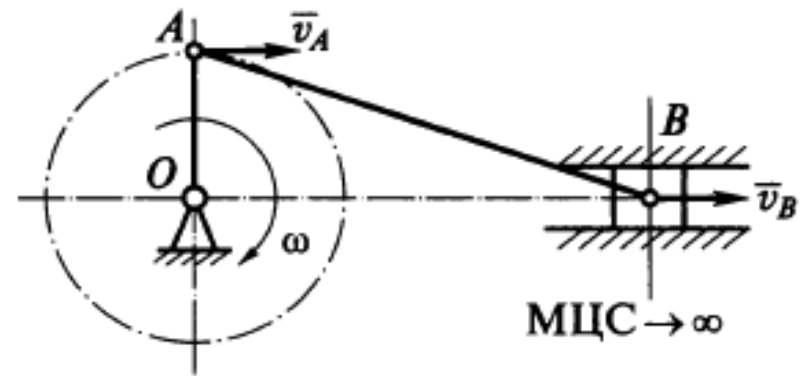
б

Решение

Рассмотрим, какие траектории движения имеют точки A , B и какие движения совершают тела, к которым они принадлежат. Точка A участвует во вращательном движении кривошипа OA , и в то же время она принадлежит шатуну AB , который совершает плоское движение. Точка B также сочленяет два тела: шатун AB и ползун B . Поскольку точка B принадлежит ползуну, совершающему поступательное движение с прямолинейной траекторией всех его точек, то для нее всегда известна траектория движения – это горизонтальная прямая. Таким образом, зная направления скоростей точек A и B , можно найти положение мгновенного центра скоростей для кривошипно-шатунного механизма, когда кривошип OA занимает вертикальное положение. Из рис. б видно, что МЦС лежит в бесконечности. Следовательно, все точки звена AB имеют одинаковые скорости.



a



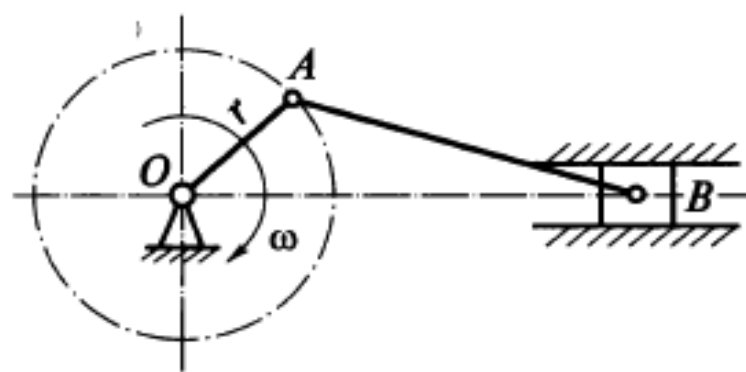
б

За один оборот кривошипа точка A проходит путь $S = 2\pi r$. Ползун B за один оборот пройдет путь, равный $4r$. Следовательно, можно найти радиус кривошипа, если известен пройденный путь точки B :

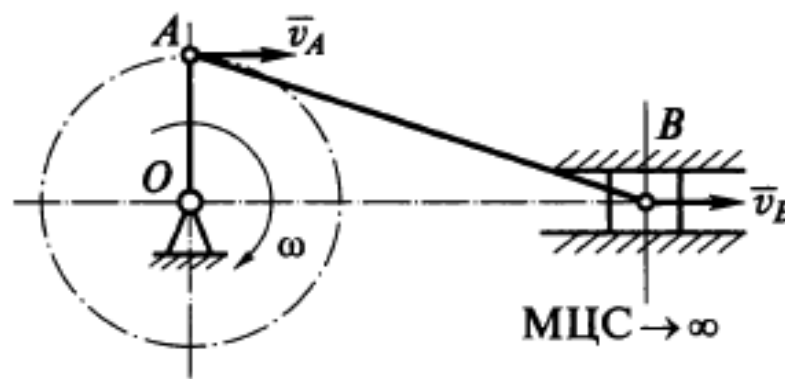
$$4r = 400 \text{ мм}; r = 100 \text{ мм.}$$

Зная радиус r кривошипа, можно определить пройденный точкой A путь за один оборот кривошипа:

$$S = 2\pi r = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ мм.}$$



a



б