Плоская система сходящихся сил (ПССС)

На тело одновременно могут воздействовать несколько сил. Как уже говорилось, совокупность нескольких сил, приложенных к телу, называется системой сил. Силы могут лежать в одной плоскости, в таком случае они образуют ***плоскую систему сил***, и в разных плоскостях, соответственно, составляя ***объемную систему сил***.

При решении задач может возникнуть необходимость замены исходной системы сил другой, упрощающей решение. Подобная замена разрешена, когда системы сил эквивалентны.

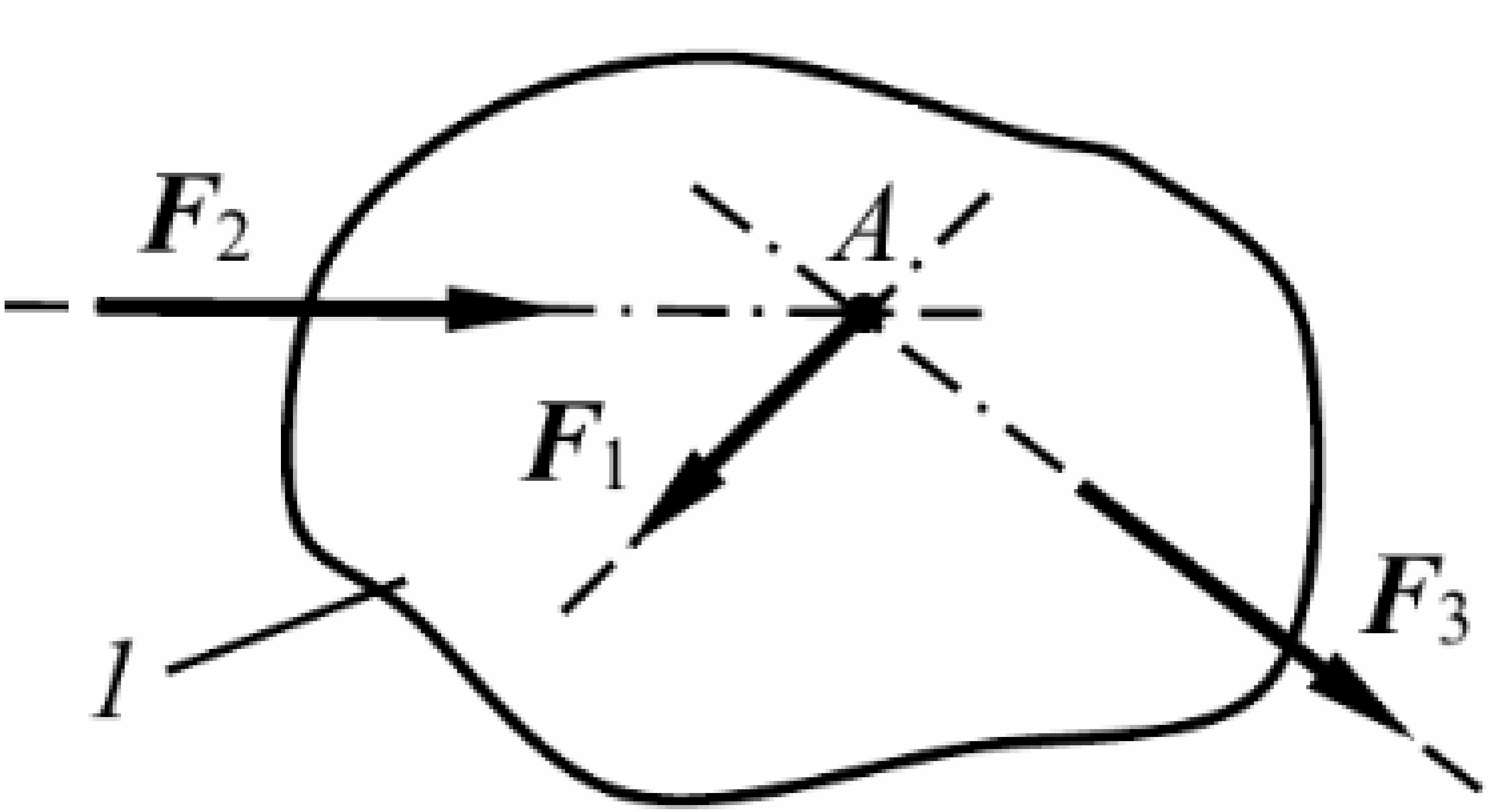
Эквивалентные системы сил – это системы различающихся сил, но оказывающие одинаковое механическое воздействие на тело.

Отсюда следует вывод, что когда две системы сил эквивалентны третьей системе, они эквивалентны и между собой.

Различают: ***системы сходящихся сил*** и ***системы произвольно расположенных сил***. Далее рассматриваем плоскую систему сходящихся сил.

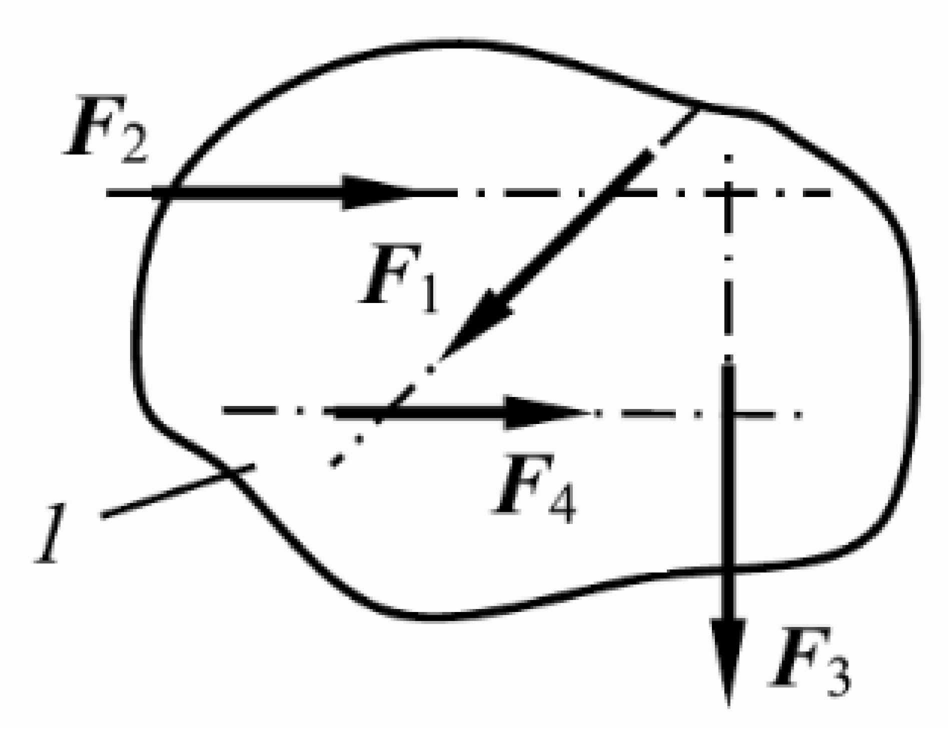
Система сходящихся сил – это система сил, все силы которой или все линии их действия, сходятся в одной точке.

Плоская система сходящаяся сил (ПССС)



1 – абсолютно твердое тело.

Когда хотя бы одна сила или линия ее действия не пересекается в точке схождения остальных сил, такая система называется системой произвольно расположенных сил. Так, на рисунке векторы сил и линии их действия не пересекаются в одной точке, соответственно, имеет место система произвольно расположенных сил.

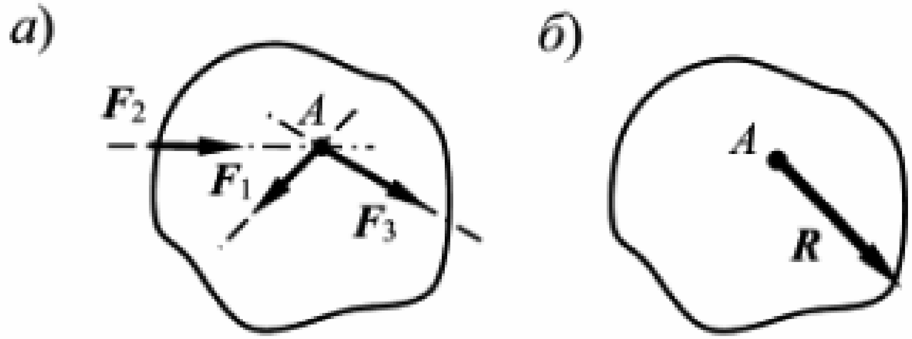


1 – абсолютно твердое тело.

Для сложения сил в соответствии с четвертой аксиомой статики необходимо, чтобы силы сходились в одной точке. Следовательно, систему сходящихся сил можно упростить, последовательно складывая составляющие ее силы. Сложение сил можно вести графически, складывая векторы сил, и аналитически, воспользовавшись для сложения формулой:

$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

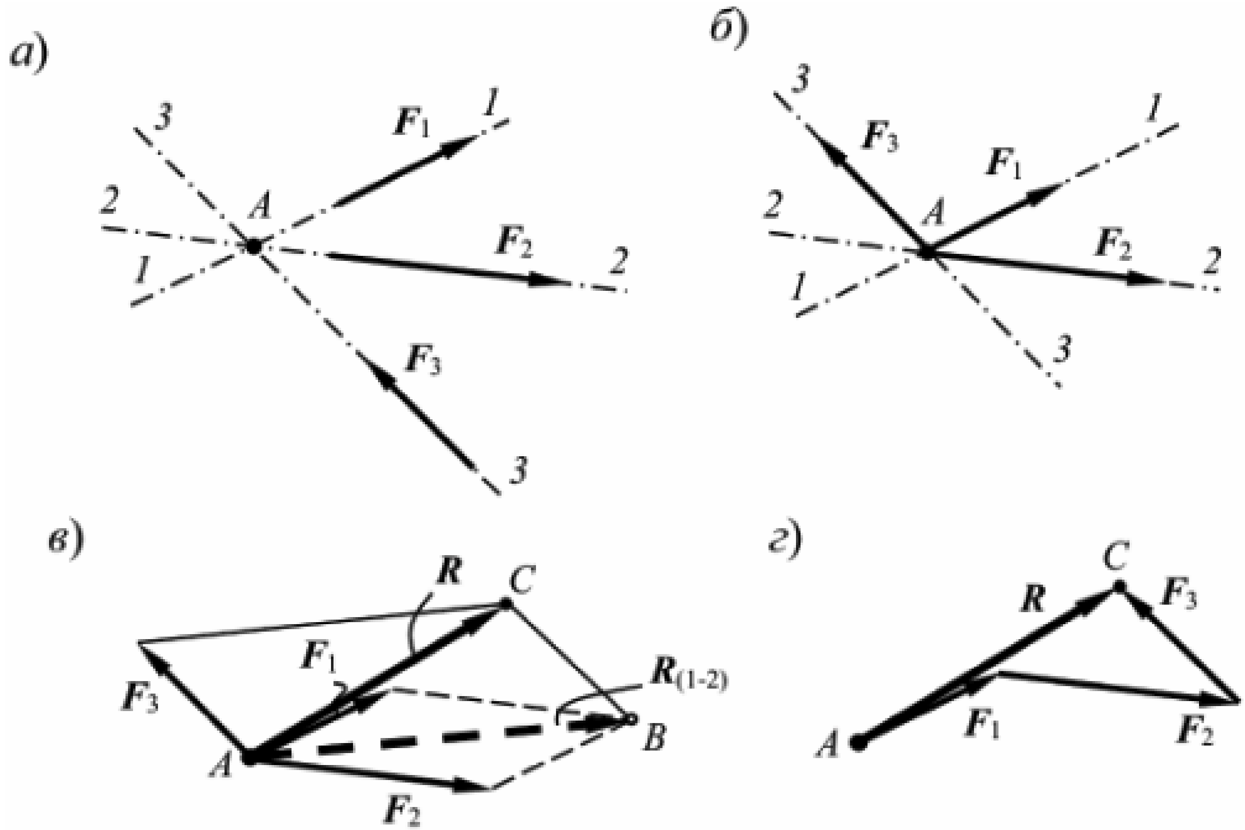
Систему сходящихся сил всегда можно заменить одной силой, равнодействующей R (рис. *а*, *б*), она эквивалентна по своему механическому воздействию на тело исходной системе сил.



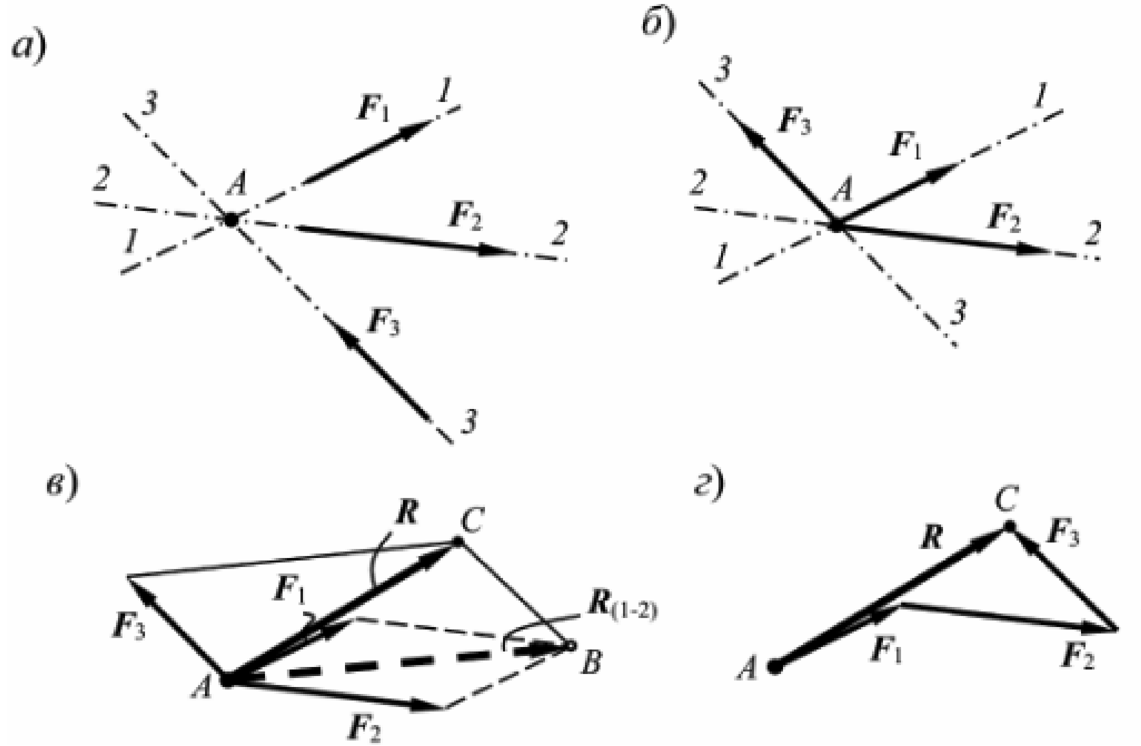
Эквивалентные системы сил: *а*) исходная система сил; *б*) равнодействующая сил системы

Понять состояние тела, например, находится оно в равновесии или не находится, если на него действует много разнонаправленных сил, можно только упростив систему сил. Если равнодействующая системы сил, приложенных к телу, не равна нулю, это значит, что тело не находится в равновесии. Равнодействующая будет постоянно воздействовать на тело, и оно будет ускоренно двигаться в направлении воздействия.

Рассмотрим плоскую систему сил, состоящую из трех сил, сходящихся в точке А (рис. а). В соответствии с третьей аксиомой статики силы можно переносить по линиям их действия. Перемещаем все силы так, чтобы они исходили из точки А (рис. б). Переносим силу F1 по линии 1 – 1, силу F2 по линии 2 – 2, силу F3 по линии 3 – 3. Затем можно последовательно выполнять их сложение, используя правило параллелограмма или правило треугольника. Складываем сначала силы F1 и F2 и получаем их равнодействующую R(1–2), затем равнодействующую R (1-2) суммируем с силой F3 и получаем общую равнодействующую всей системы сходящихся сил R = F1 + F2 + F3 (рис. в).



Нахождение равнодействующей можно упростить, выполняя построение ***силового многоугольника.*** Последовательно из конца вектора предшествующей силы откладываем вектор следующей силы, замыкающий вектор, проведенный из начала первой силы (точки А) к концу последней силы (точке С), и будет равнодействующей всей системы сил R (рис. г). Иными словами, равнодействующая замкнет многоугольник сил. Вектор равнодействующей исходит из точки начала построения и направлен к концу последней силы силового многоугольника. В статике силы прикладывают либо к абсолютно твердым телам, либо к материальным точкам.

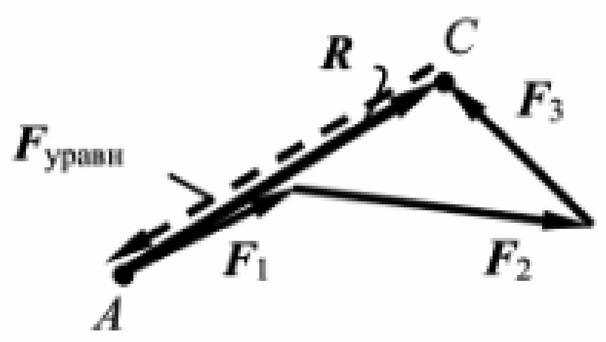


Строя силовой многоугольник, можно суммировать любое количество сходящихся сил. Длины векторов складываемых сил должны соответствовать принятому масштабу и при их переносе следует следить за тем, чтобы они переносились параллельно своим исходным направлениям.

Зная масштаб сил и измерив длину вектора равнодействующей, можно определить значение модуля равнодействующей.

Если последняя из слагаемых сил силового многоугольника заканчивается в начальной точке построения, равнодействующая равна нулю, и, следовательно, такая система сил находится в равновесии.

Если ставится условие, что система сил должна находиться в равновесии, но это условие не выполняется, необходимо в систему сил добавить уравновешивающую силу, она по модулю должна быть равна равнодействующей (Fуравн = R) и направлена в противоположную сторону – из точки С в точку А.
Заменив равнодействующую уравновешивающей силой, мы обеспечиваем равновесие всей системы сил. При этом силовой многоугольник замкнется.



Для равновесия системы сил следует заменить равнодействующую уравновешивающей силой

Условие равновесия системы сходящихся сил *записывается как равенство нулю всех сил системы:*

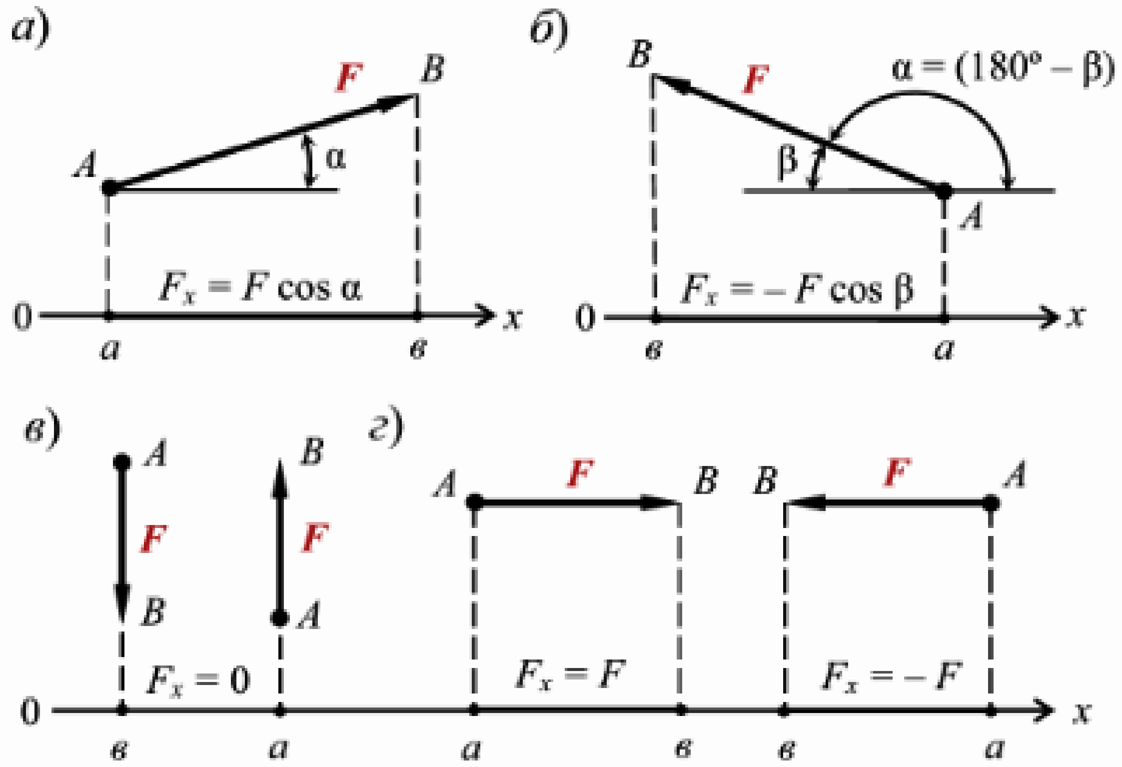
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0.$$

Проекции сил на координатные оси

Графический способ решения задач часто не дает необходимой точности. Намного проще решать задачи аналитически, оперируя не векторами сил, а скалярными величинами, к которым относятся проекции сил на оси.

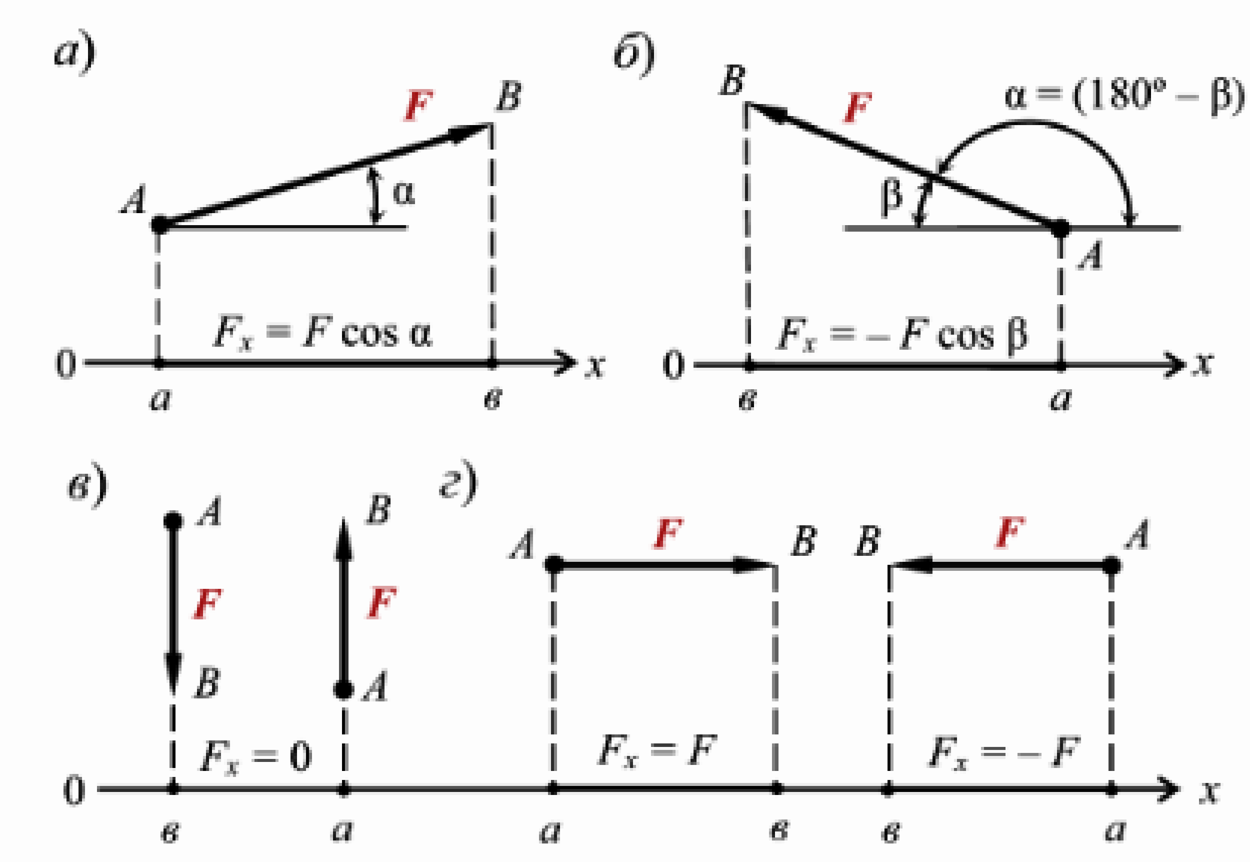
Проекцией силы на ось называют длину направленного отрезка, который откладывается на оси и заключен между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и из конца вектора силы.

Проекция вектора силы (рис. *а*, *б*) считается положительной (принимается со знаком «плюс»), если направление от точек проецирования начала и конца силы совпадает с направлением оси. Если направление проекции начала силы и ее конца не совпадает с направлением оси, проекция считается отрицательной (знак «минус»).



Проекции сил на ось: *а*), *б*) наклонно расположенные силы по отношении к оси *x*; *в*) силы, перпендикулярные к оси *x*; *г*) силы, параллельные оси *x*

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.
Соответственно, силы, расположенные перпендикулярно к оси, проецируются в точку – проекция равна нулю, а силы, параллельные оси, проецируются в натуральную величину, т.е. длина проекции равна модулю силы (рис. в, г).



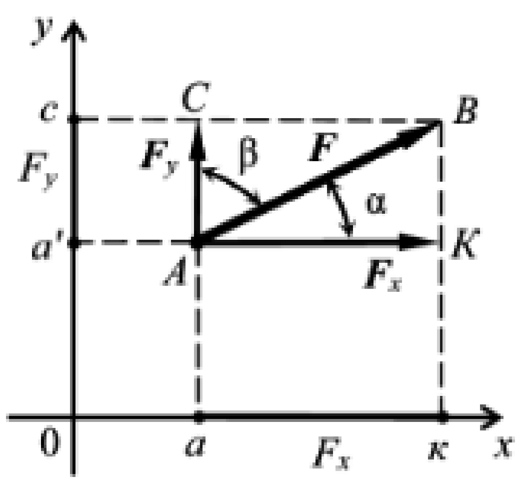
Проекции сил, если они действуют по одной оси, можно суммировать (складывать или вычитать в зависимости от их знака).

Любую произвольно направленную силу ***F*** можно разложить на составляющие ее векторы. Если принять, что между составляющими силу векторами будет угол 90° и их направление параллельно координатным осям, получаем исходящие из точки *A* два вектора: $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$ равные по модулям и направлению проекциям силы на соответствующие координатные оси.

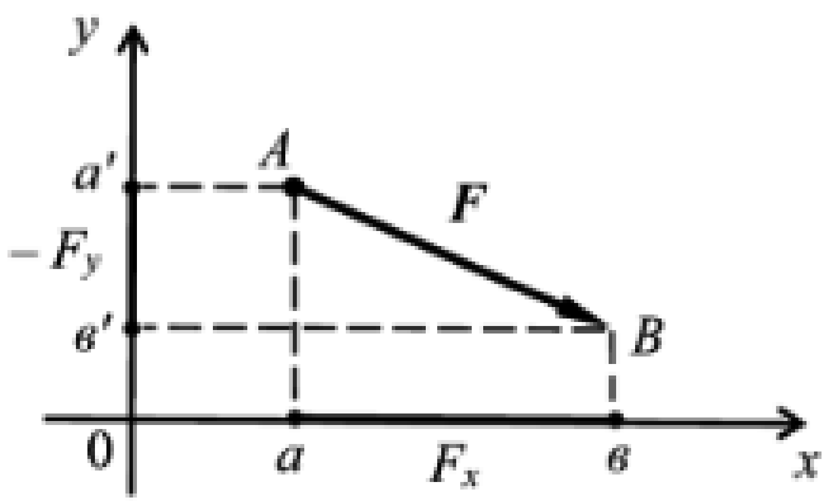
Значение проекций сил можно определить алгебраически:

$$F_x = F\cos\alpha;\ \ F_x = F\sin\beta;$$

$$F_y = F\sin\alpha;\ \ F_y = F\cos\beta,$$



Проекции одной и той же силы на разные координатные оси могут различаться знаками, так на рис. проекция силы $\boldsymbol{F}$ на ось x совпадает с направлением оси, F_x и имеет знак «плюс», а проекция на ось y не совпадает с направлением оси и F_y имеет знак «минус».

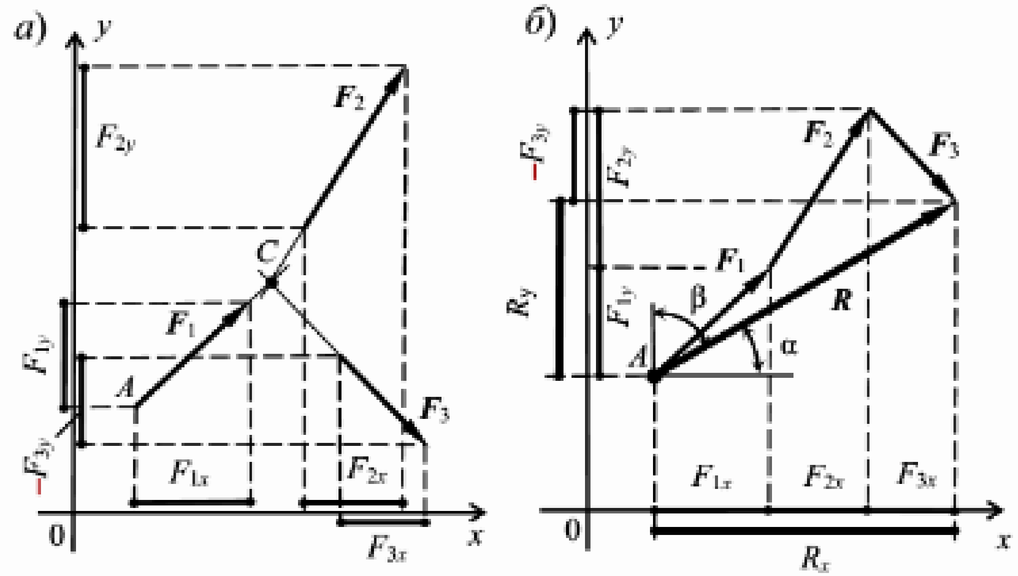


Если взять систему сил и спроецировать все силы на координатные оси, то проекции сил по каждой оси можно суммировать, учитывая их значения и знаки (рис. *а*, *б*):

$$\sum_{i=1}^{3} F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}; \quad \sum_{i=1}^{3} F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}.$$

Результирующие значения проекций всей системы сил на оси x, y соответствуют проекциям равнодействующей на эти же оси: $\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = R_x$; $\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = R_y$ (рис. *б*). Иными словами, если определить равнодействующую всей системы сил и затем спроецировать ее на координатные оси, то получим такой же результат, как при суммировании проекций всех сил системы на эти же оси.

Итак, ***проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций всех векторов системы на ту же ось.***



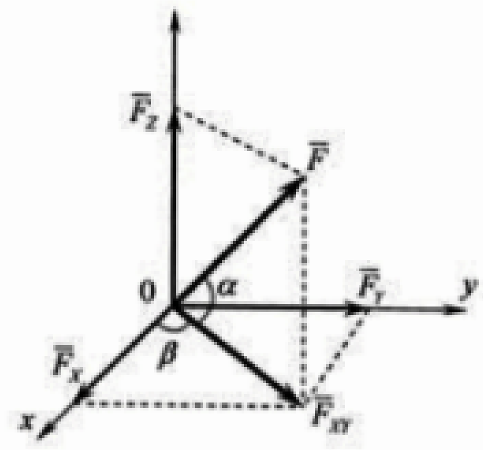
Задание силы $\vec{F}$ ее проекциями на координатные оси (координатами)

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$ – *модуль силы,*

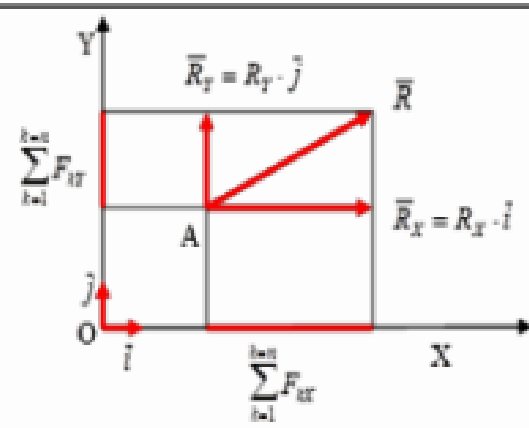
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \cos\gamma = \frac{F_z}{F}}$$

– *направляющие косинусы*



Теорема. Проекция вектора суммы на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k}$$



Как уже отмечалось, при равновесии системы сходящихся сил ее равнодействующая равна нулю.

Отсюда следует, что ***при равновесии системы алгебраические суммы проекций всех сил системы на координатные оси равны нулю***.

Условия равновесия системы сходящихся сил

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0.$$

Для упрощения написания, систему уравнений часто записывают следующим образом:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0,$$

где $\sum X$ – алгебраическая сумма проекций всех сил на ось x; $\sum Y$ – алгебраическая сумма проекций всех сил на ось y. В дальнейшем будем применять упрощенную запись системы уравнений.

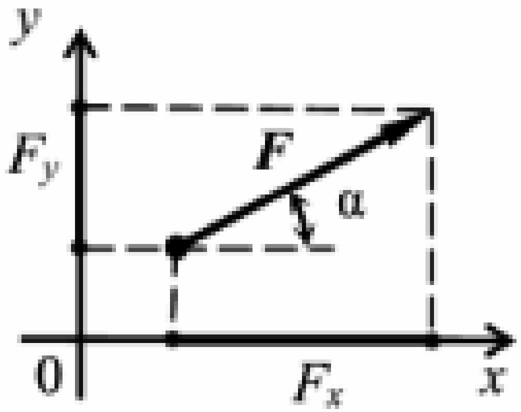
Зная проекции сил на координатные оси, значение равнодействующей всех сходящихся сил можно определить по формуле:

$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2} \quad \text{или} \quad R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}.$$

Направление вектора равнодействующей можно найти через косинусы углов:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}.$$

Пример. Необходимо определить проекции силы $\boldsymbol{F}$ на координатные оси, сила действует под углом $\alpha = 30^o$ к оси x. Модуль силы $F = 76$ кН.



Решение. 1. Проецируем силу на координатные оси, проводя перпендикуляры из точек начала и конца силы к осям x, y. Направление полученных проекций совпадает с направлением осей, следовательно, они имеют положительные значения.

2. Устанавливаем значения косинуса и синуса угла α (cos 30º = 0,886; sin 30º = 0,5).

3. По формулам определяем значения проекций силы:
$F_x = F \cos 30^\circ = 76 \cdot 0{,}886 = 67{,}34$ кН; $F_y = F \sin 30^\circ = 76 \cdot 0{,}5 = 38$ кН.

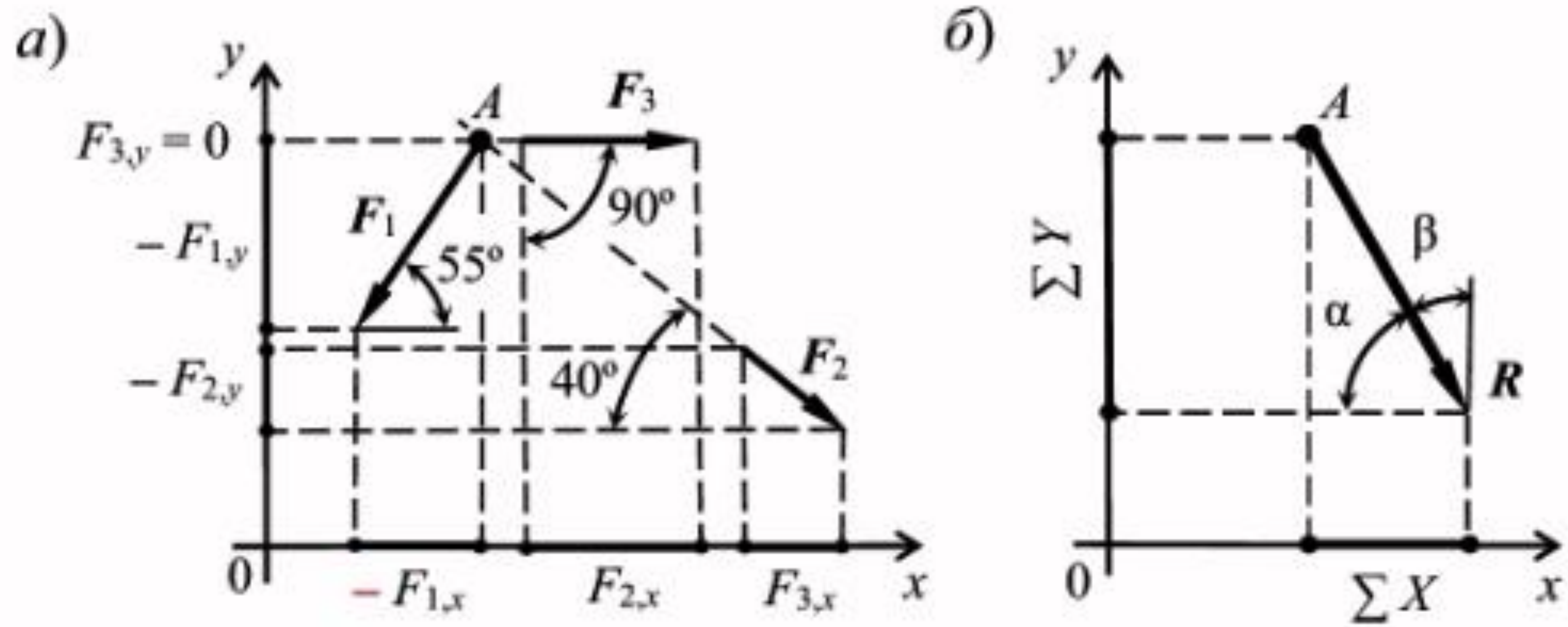


Рис. К примеру: *а*) система сходящихся сил; *б*) равнодействующая системы и ее проекции на оси

Пример. Определить суммы проекций системы сходящихся сил (рис. *а*) на оси *x*, *y*. Установить значение и направление действия равнодействующей. Модули сил: $F_1 = 90$ кН, $F_2 = 60$ кН, $F_3 = 72$ кН.

Решение. 1. Проецируем силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ на координатные оси и устанавливаем знаки проекций. Проекции на ось x:

$$F_{1,x} = F_1 \cos 55° = 90 \cdot 0{,}5736 = -51{,}62 \text{ кН};$$

$$F_{2,x} = F_2 \cos 40° = 60 \cdot 0{,}766 = 45{,}96 \text{ кН};$$

$$F_{3,x} = F_3 = 72 \text{ кН};$$

Проекции на ось y:

$$F_{1,y} = F_1 \sin 55° = 90 \cdot 0{,}8192 = -73{,}73 \text{ кН};$$

$$F_{2,y} = F_2 \sin 40° = 60 \cdot 0{,}6428 = -38{,}57 \text{ кН};$$

$$F_{3,y} = 0 \text{ кН}.$$

2. Суммируем проекции сил, учитывая их знаки:

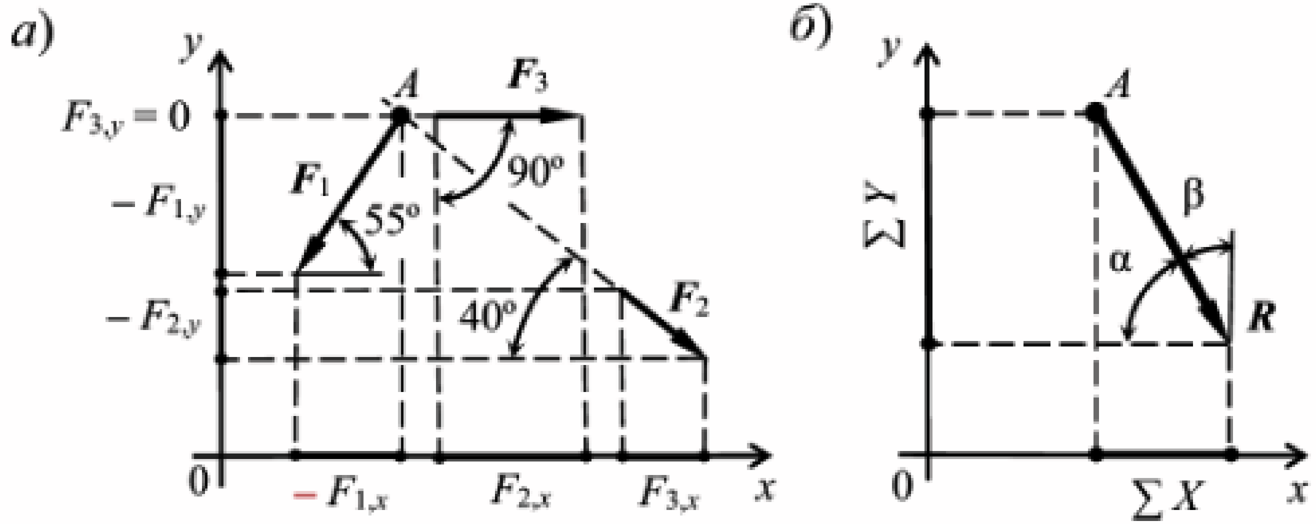
$$\sum X = R_x = (-F_{1,x}) + F_{2,x} + F_{3,x} = -51{,}62 + 45{,}96 + 72 = 66{,}34 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = R_y = (-F_{1,y}) + (-F_{2,y}) + F_{3,y} = -73{,}73 - 38{,}57 + 0 = -112{,}3 \text{ кН}.$$

3. Модуль равнодействующей определяем по формуле:

$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} = \sqrt{66{,}34^2 + (-112{,}3)^2} = 130{,}43 \text{ кН}.$$

Откладываем на координатных осях от проекций точки A суммарные значения проекций сил ($\sum X$, $\sum Y$) и строим на их основе равнодействующую (рис. *б*).



Определяем косинусы углов наклона равнодействующей к осям:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{66{,}34}{130{,}43} \approx 0{,}509; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{112{,}3}{130{,}43} \approx 0{,}861.$$

Отсюда, получаем углы наклона равнодействующей $\alpha = 59^\circ 24'$; $\beta = 30^\circ 36'$.