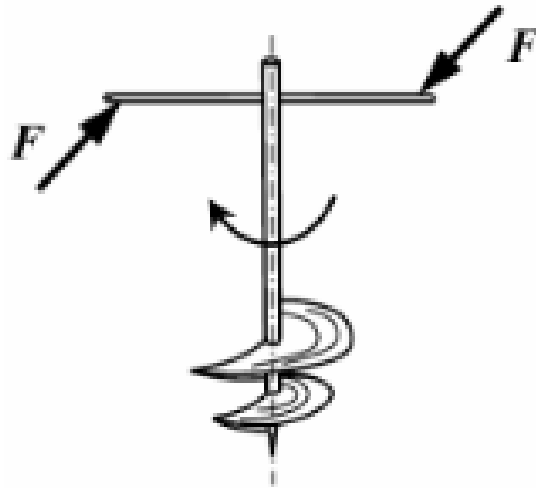


Система пар сил

Силы, кроме поступательного движения, могут вызывать вращение тел. Рассмотрим действие двух разнонаправленных параллельных сил, модули которых равны, они составляют пару сил.

Парой сил называют две параллельные силы, равные по модулю и направленные в противоположные стороны.

Плоскость, в которой лежат силы, образующие пару, называется плоскостью действия пары сил. Механическое воздействие пары сил на тело отличается от действия других параллельных сил. Сумма проекций сил пары на координатные оси равна нулю, иначе говоря, ее равнодействующая равна нулю. Вместе с тем тело, к которому приложена пара сил, не остается в равновесии, под действием пары сил оно начинает вращаться. Вращение будет происходить относительно оси, перпендикулярной плоскости действия пары сил.



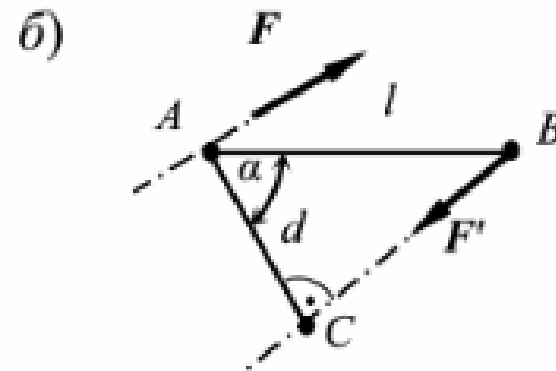
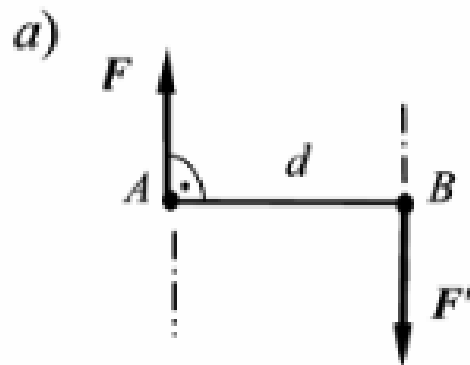
Механическое воздействие пары сил на тело определяется моментом пары сил

Моментом пары сил называется произведение модуля любой из сил, входящих в пару, на кратчайшее расстояние между линиями действия сил

$$M = \pm Fd,$$

где M – момент пары сил; F – любая из сил, составляющих пару сил; d – плечо пары сил.

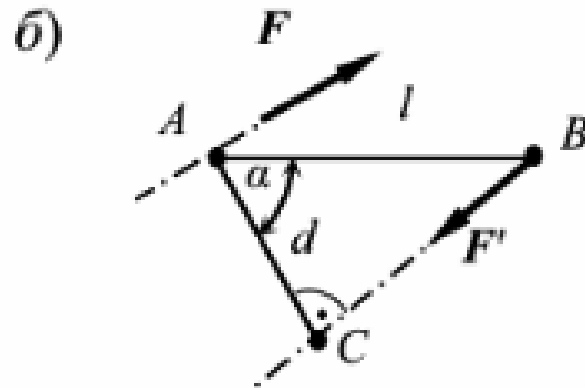
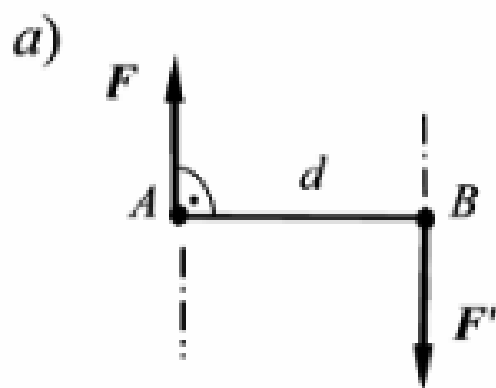
Плечом пары сил называется кратчайшее расстояние между силами пары, им является перпендикуляр, проведенный к линиям действия сил.



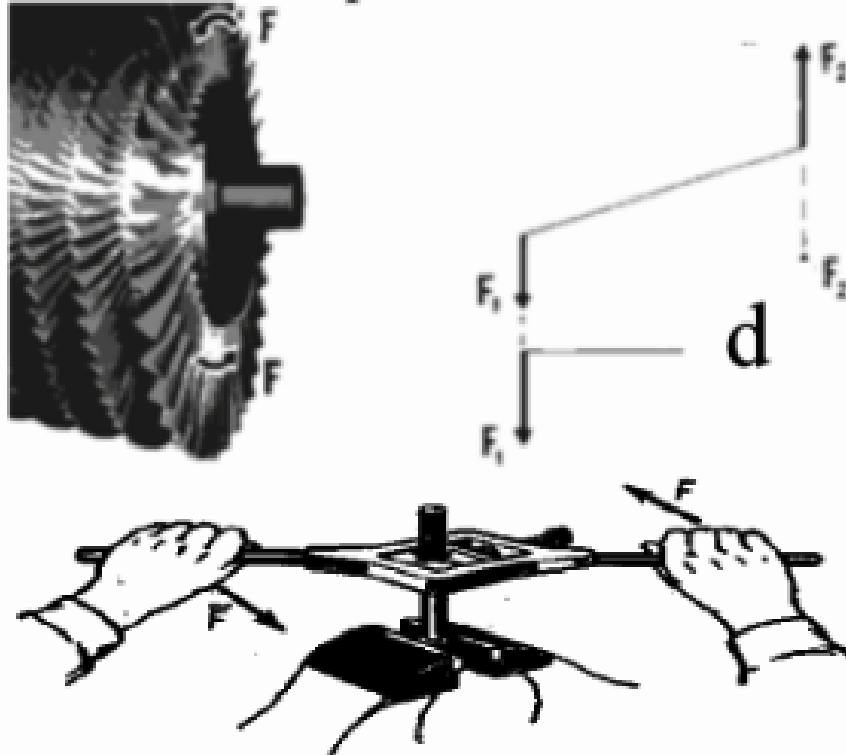
На рисунке *б* изображено, что пара сил может находиться под углом к горизонтальной линии *l*. В этом случае, если известно расстояние *l* и угол наклона сил, плечо пары можно определить через косинус угла, $d = l \cos \alpha$.

Момент пары сил измеряется в ньютонметрах (Н·м) или в кратных единицах (Н·см; кН·м, кН·см).

Пара сил способна вращать как свободное тело, так и прикрепленное шарниром. Связи могут полностью препятствовать вращению тела, но если к такому телу приложить пару сил, на тело будет передаваться ее вращательное воздействие, вызывая появление реакций в связях.



Пара сил – это система двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил.

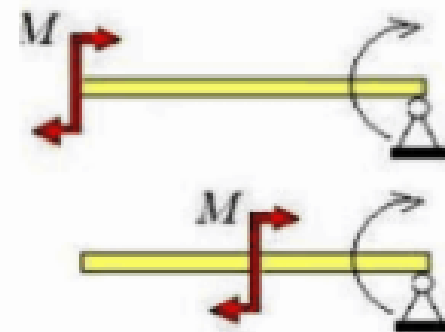
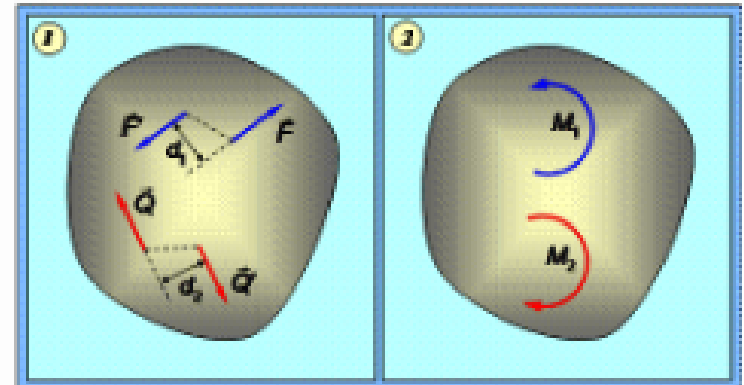


Вращающее действие пары сил не зависит от точки ее приложения.

Момент пары равен произведению силы на плечо.

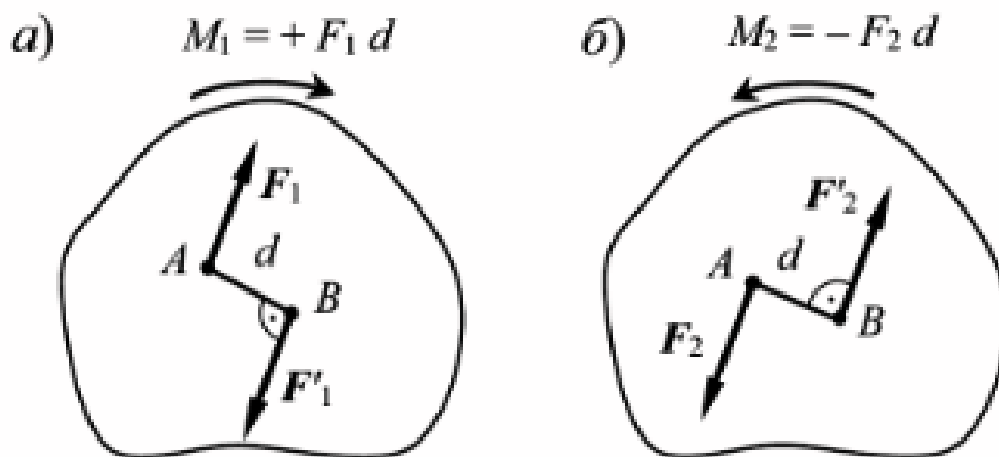
$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F \cdot d$$

Плечо – длина перпендикуляра между линиями действия сил.



Если при взгляде на плоскость сверху пара сил вызывает вращение по часовой стрелке, момент пары считают положительным (знак «плюс») (рис. а), если против часовой стрелки, считают отрицательным (знак «минус») (рис. б).

Момент пары сил зависит как от модуля сил, так и от длины плеча. Пары сил с различными модулями сил могут оказывать одинаковое механическое воздействие на тело, соответственно, при этом их плечи должны различаться по длине.

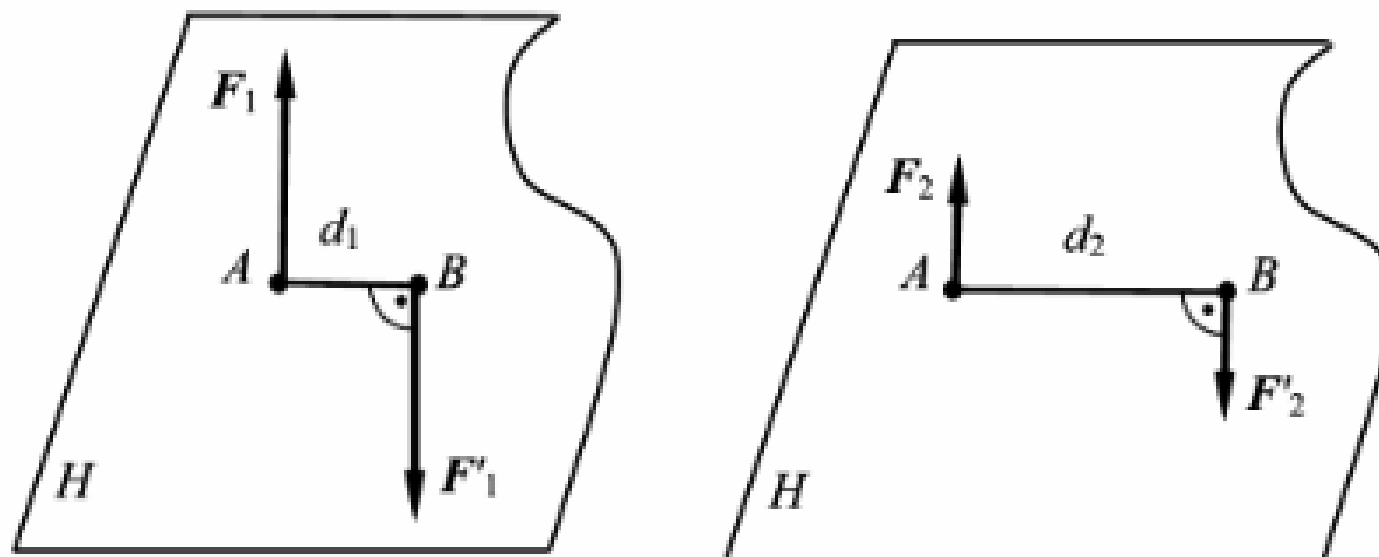


Пары сил на плоскости и создаваемые ими моменты:

а) положительное значение момента; б) отрицательное значение момента

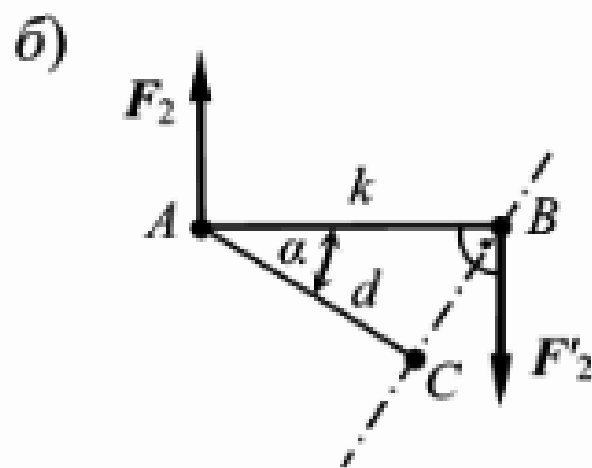
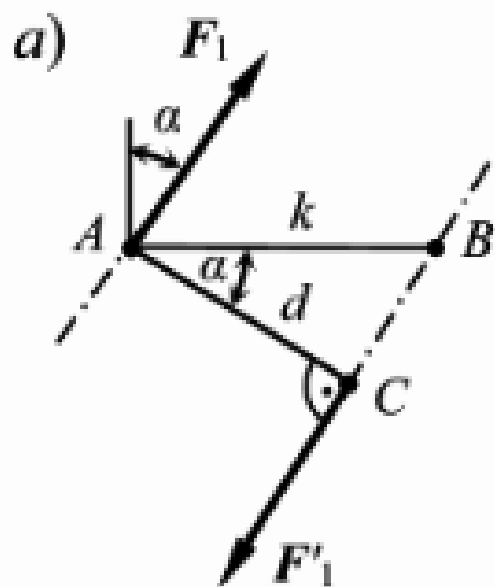
Пары сил, оказывающие одинаковое механическое воздействие на тело, считаются эквивалентными.

Возьмем эквивалентные пары сил (F_1, F'_1) , (F_2, F'_2) , они должны лежать в одной плоскости, создавать вращение в одном направлении, в них должны выполняться отношения: $F_1 / F_2 = d_2 / d_1$, иначе говоря, значения их моментов должны быть равны: $M_1 = F_1 d_1 = M_2 = F_2 d_2$.

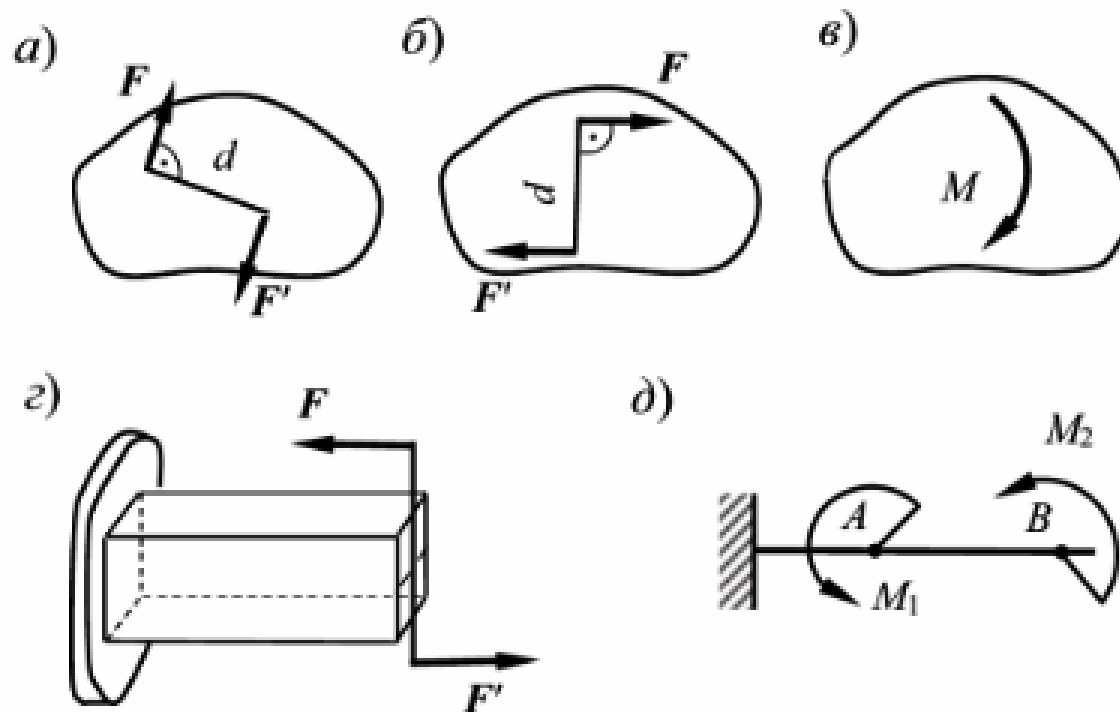


Эквивалентные пары сил (одинаковое направление вращения, и соблюдается отношение $\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$)

На рисунке показано преобразование пары сил в эквивалентную пару путем замены плеча d на плечо k . Для получения эквивалентной пары сил проецируем силы исходной пары сил в положение, перпендикулярное плечу k . Для пары сил, изображенной на рис. б, сила $F_2 = F_1 \cos \alpha$. Плечо новой пары сил $k = d / \cos \alpha$. Пары сил на рис. а и б эквивалентны, так как значения создаваемых ими моментов одинаковы $M_1 = M_2 = F_1 d = F_2 k$.

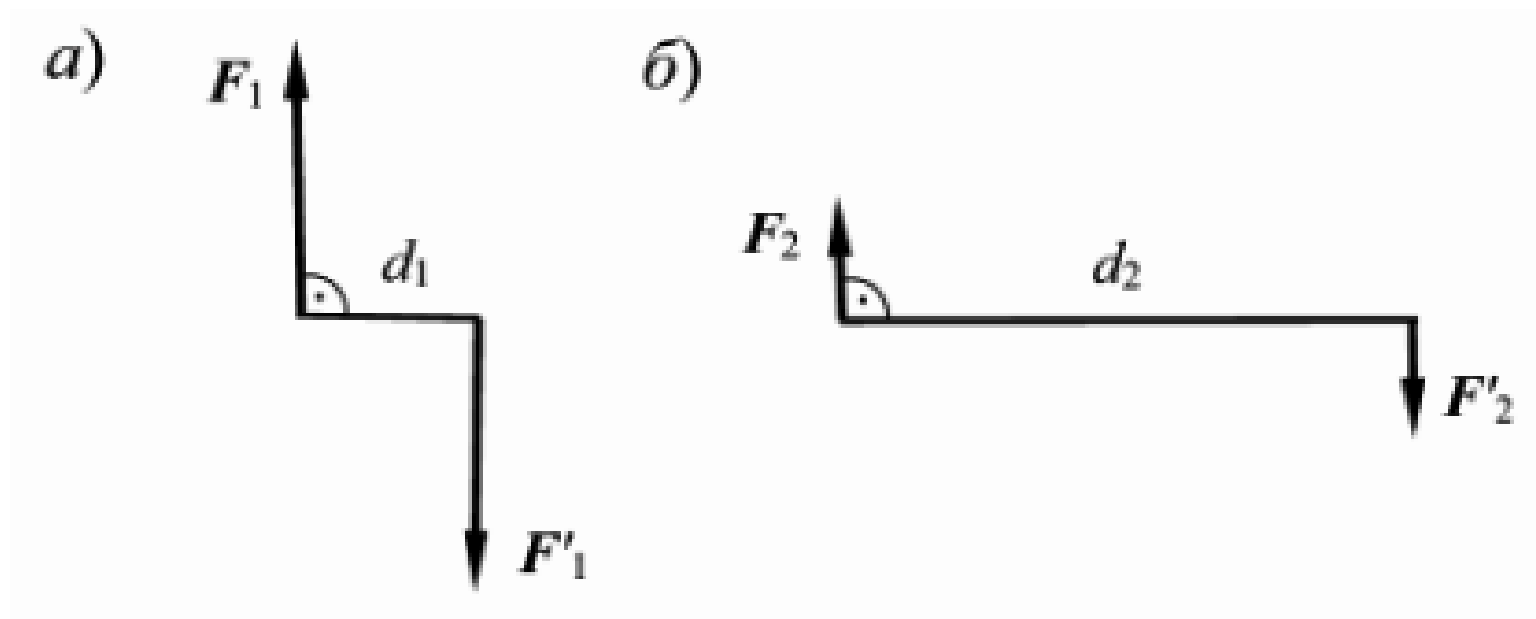


Действующую на тело пару сил можно переносить, поворачивать и прикладывать в плоскости ее действия в любое место тела, при этом механическое состояние тела не изменится, так как при любых перемещениях пары сил ее момент остается неизменным (рис. а, б).



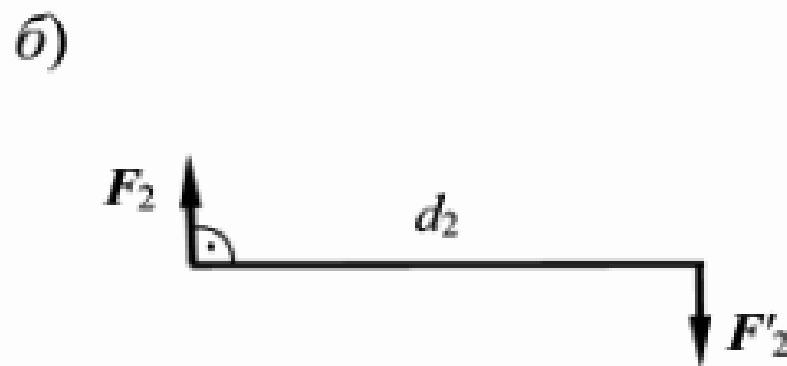
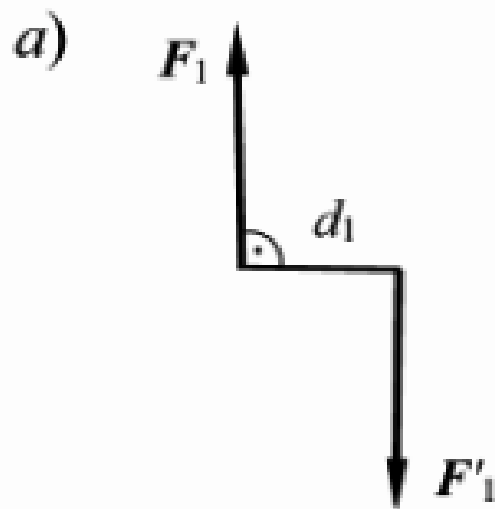
Пары сил и моменты: а), б) перенос одной и той же пары сил в разные места тела; в) пара сил заменена моментом; г) пара сил, приложенная к консольной балке; д) изображение моментов на схеме балки с указанием точек их приложения

Пример. Дана пара сил (рис. *a*), модули сил (F_1, F'_1) = 25 кН, плечо пары сил $d_1 = 12$ см. Определить значение сил эквивалентной пары, имеющей плечо $d_2 = 40$ см.



a) заданная пара сил; *б)* эквивалентная пара сил

Решение. Находим значение момента заданной пары сил $M_1 = F_1 d_1 = 25 \cdot 12 = 300$ кН·см. Приравниваем значение момента эквивалентной пары сил моменту заданной пары $M_2 = F_2 d_2 = F_2 \cdot 40 = M_1 = 300$ кН·см, отсюда $F_2 = 300 / 40 = 7,5$ кН (рис. б).

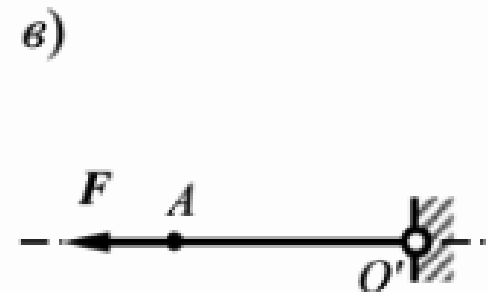
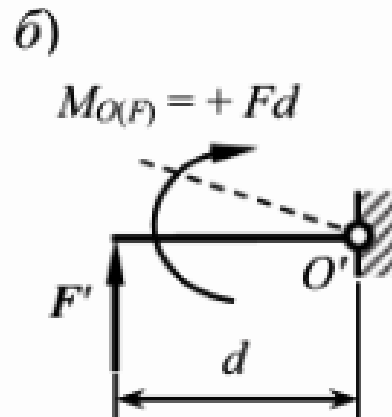
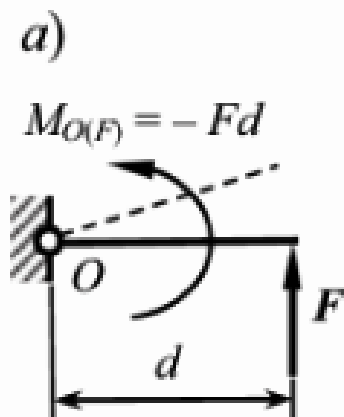


Задача 1. Момент пары сил $M = 25$ кН·м, модули сил (F_1, F'_1) = 5 кН, определите значение плеча пары сил.

Задача 2. Заданная пара сил имеет модули сил (F_1, F'_1) = 100 Н и плечо $d_1 = 25$ см. Силы в эквивалентной паре (F_2, F'_2) = 150 Н. Определите значение плеча эквивалентной пары сил.

Момент силы относительно точки

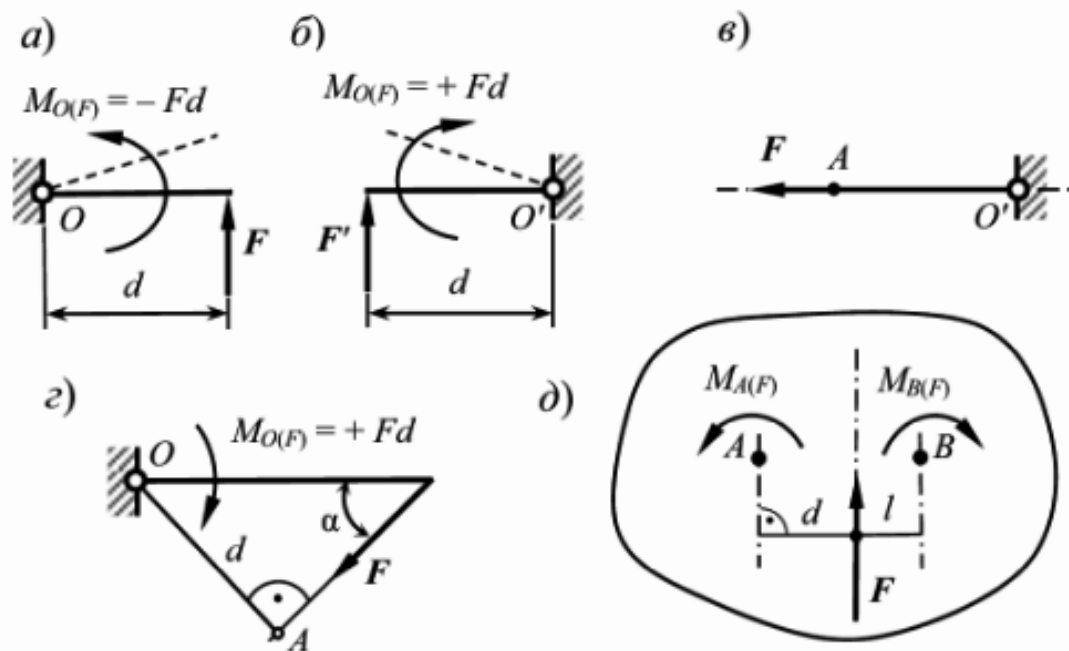
Если тело прикрепить к шарниру и приложить силу, линия действия которой не проходит через шарнир, тело начнет вращаться (рис. а, б). Вращательное действие (поворот тела) возникает от момента силы относительно шарнира – точки O . Механическое состояние такого тела схоже с действием пары сил, но тело должно быть прикреплено шарниром к определенной точке, вокруг которой и происходит вращение. Если линия действия силы проходит через шарнир, вращения не возникает, тело в этом случае либо растягивается, либо сжимается (рис. в).



Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы

$$M_{O(F)} = \pm Fd,$$

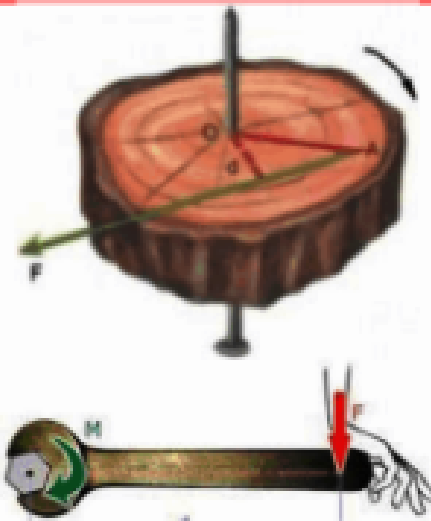
где $M_{O(F)}$ – момент силы F относительно точки O .



Моменты относительно точек: а) вращение против часовой стрелки – знак момента «минус»; б) вращение по часовой стрелке – знак момента «плюс»; в) линия действия силы проходит через шарнир – момент не создается; г) сила действует под углом α к телу; д) моменты относительно точек, лежащих с разных сторон от силы

Момент силы относительно точки характеризует способность силы вызывать поворот вокруг этой точки.

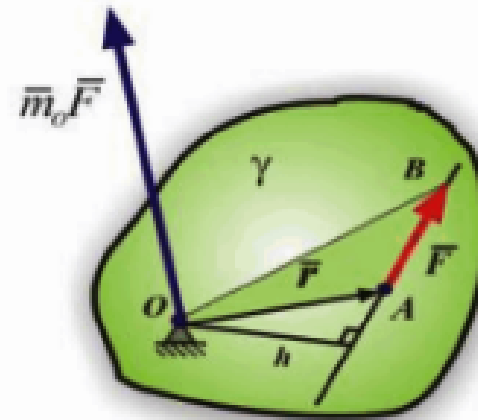
$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



Для плоской системы сил рассматривают **алгебраический момент** си-

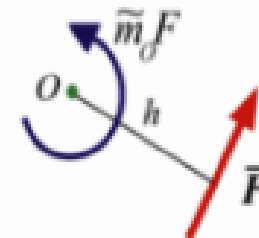
лы: $m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot d$

Вектор момента силы



Алгебраический момент силы

Плечо силы (d) – кратчайшее расстояние от центра



тра до линии действия силы

Правило

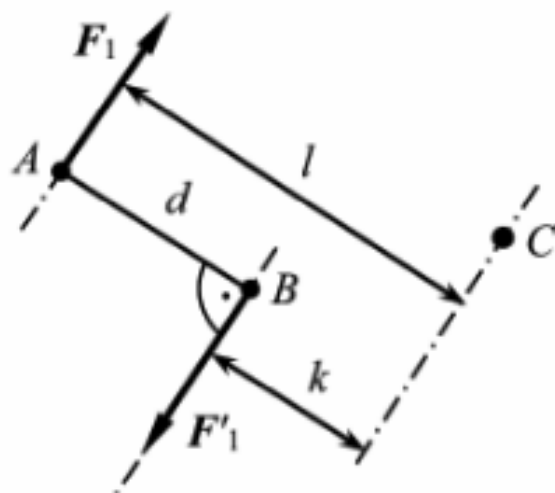
знаков:



Необходимо отметить, что наряду со схожестью воздействия на тело пары сил и момента силы относительно точки, между ними имеются различия. Чтобы создавать момент относительно точки, сила должна передаваться через тело, которое имеет точку закрепления. Если нет точки закрепления тела, сила будет вызывать в нем не вращение, а поступательное движение. Численное значение момента пары сил и его знак не зависят от положения пары сил на плоскости, а момент силы зависит от положения точки, относительно которой он определяется. Как и для пар сил, моменты силы относительно точки измеряют в ньютонметрах (Н·м) или в кратных единицах (Н·см; кН·м; кН·см).

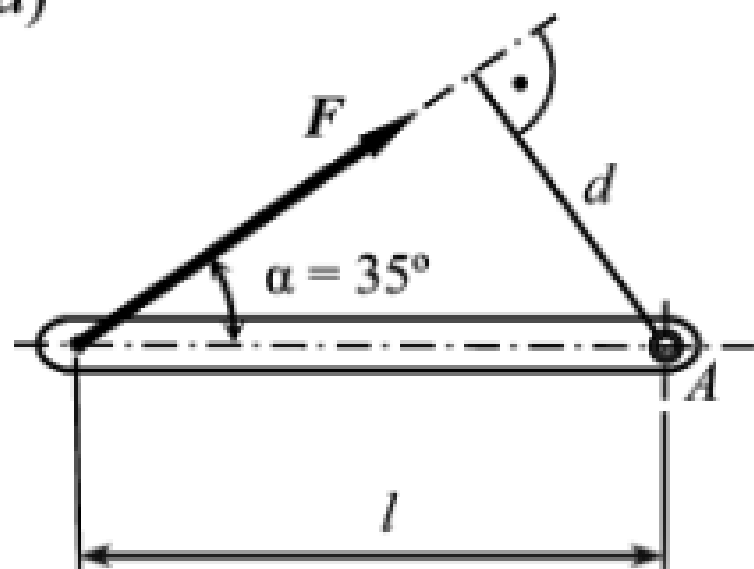
Рассматривая пару сил на плоскости, следует отметить следующее ее свойство: сумма моментов сил, которые составляют пару, относительно любой точки в плоскости действия пары равняется моменту пары.

Для доказательства возьмем произвольную точку C , лежащую в плоскости пары сил, и определим сумму моментов относительно этой точки, которые создают силы, входящие в пару: $\sum M_{C(F_i)} = F_1 l - F_1' k$, или, учитывая, что модули сил, входящих в пару, равны, получим $\sum M_{C(F_i)} = F(l - k)$, а так как $(l - k) = d$, устанавливаем, что $\sum M_{C(F_i)} = M = Fd$. Соответственно, момент сил, составляющих пару, относительно точки C равен моменту пары сил.

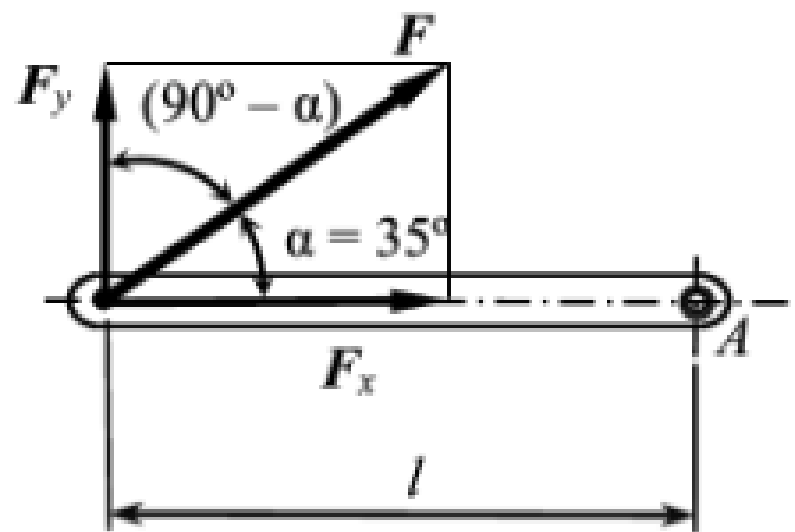


Пример. Определить моменты силы $F = 58$ кН относительно точки A , расстояние $l = 12$ см.

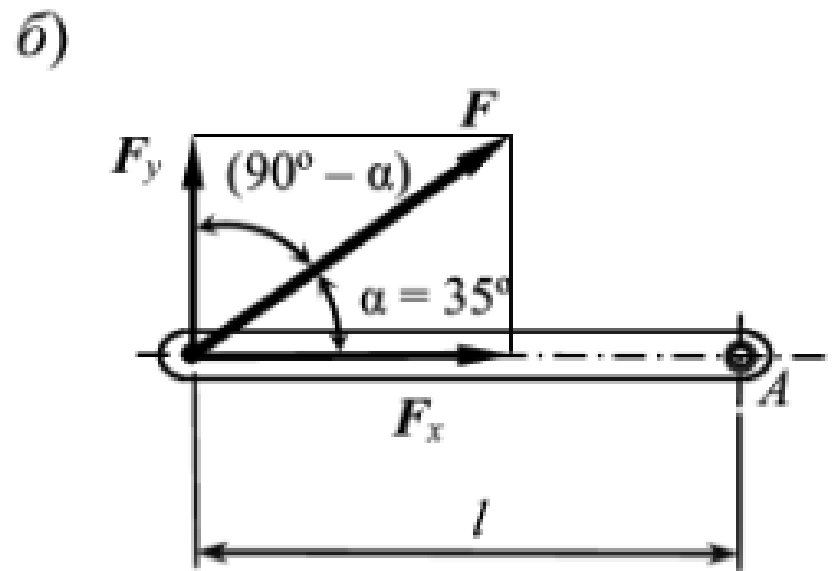
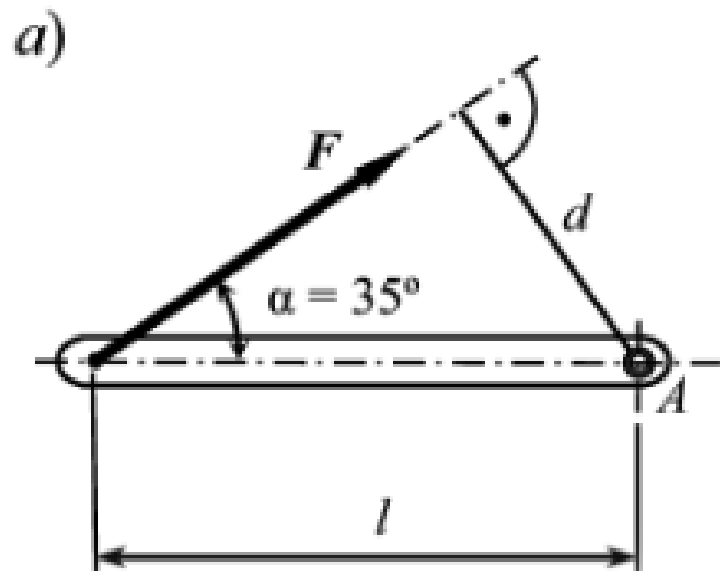
a)



b)



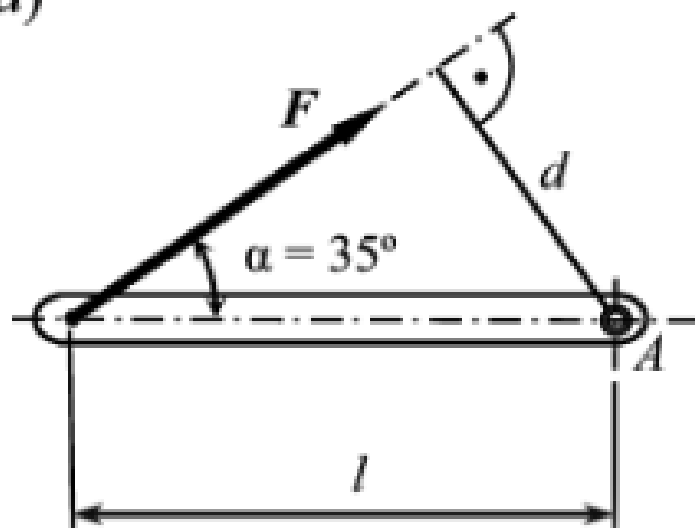
Решение. Находим кратчайшее расстояние (плечо) между линией действия силы и точкой A : $d = l \cos (90^\circ - \alpha) = 12 \cdot \cos 55^\circ = 12 \cdot 0,5736 = 6,883$ см (рис. *a*). Определяем момент силы относительно точки: $M_{A(F)} = Fd = 58 \cdot 6,883 = 399,2$ кН·м.



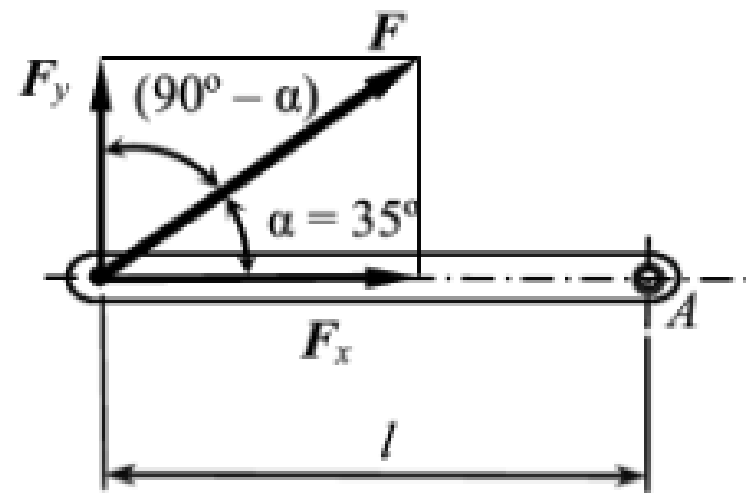
Возможен и другой вариант решения. 1. Раскладываем силу F на две составляющие: $F_x = F \cos \alpha = 58 \cdot 0,8192 = 47,514$ кН; $F_y = F \sin \alpha = 58 \cdot 0,5736 = 33,269$ кН (рис. 3.10б). 2. Определяем момент, который создает составляющая F_y относительно точки A : $M_{A(F_y)} = F_y l = 33,269 \cdot 12 = 399,2$ кН·м.

Другая составляющая силы (F_x) момент относительно точки A не создает, так как ее линия действия проходит через точку.

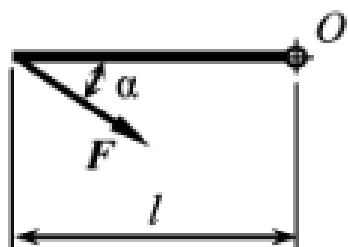
а)



б)

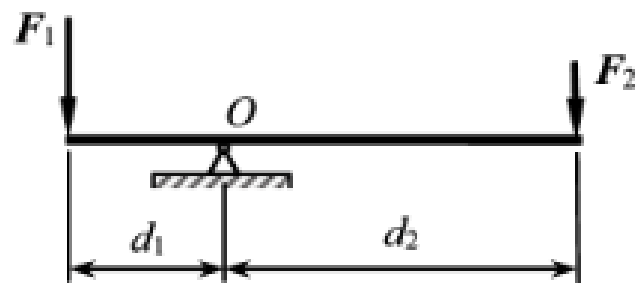


Задача 3. Определите значение момента силы $F = 32$ кН, относительно точки O . Длина элемента, к которому приложена сила $l = 42$ см. Сила действует под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси элемента.



Задача 4. Определите значения моментов справа и слева от точки O для доски, находящейся на опоре.

Силы $F_1 = 14$ кН, $F_2 = 2$ кН. Плечи сил $d_1 = 0,2$ м, $d_2 = 1,3$ м. Установите, куда повернется доска.

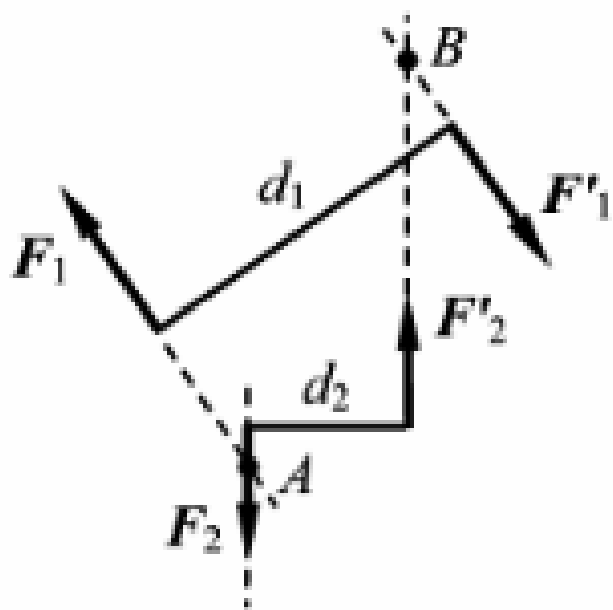


Сложение пар сил и моментов сил. Равновесие системы пар сил.

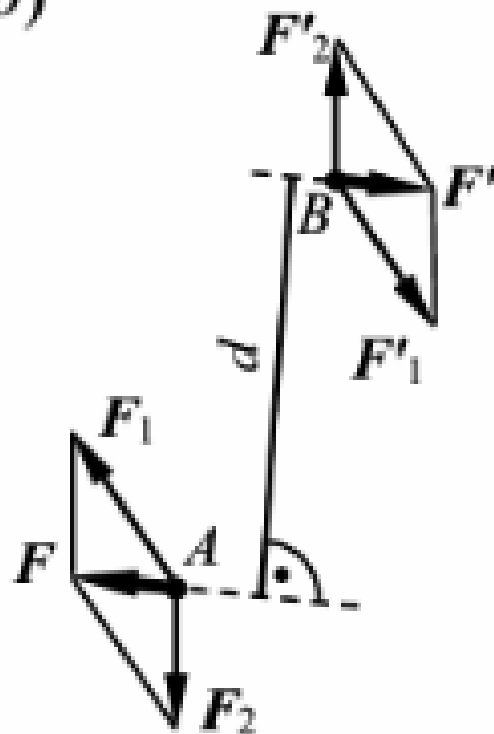
Вращательные действия пар сил, а следовательно, и сами пары сил можно суммировать, и в результате получаем результирующую пару сил. **Результирующей парой сил называется** пара сил, полученная в результате сложения системы пар сил. При этом суммируются механические воздействия на тело всех пар сил системы с учетом передаваемых ими направлений вращений (с учетом знаков). Здесь рассматривается сложение пар сил, лежащих в одной плоскости.

Пример. Графически сложить две пары сил, лежащих в одной плоскости, и найти результирующую пару сил. Исходная система пар сил изображена на рис. *a*.

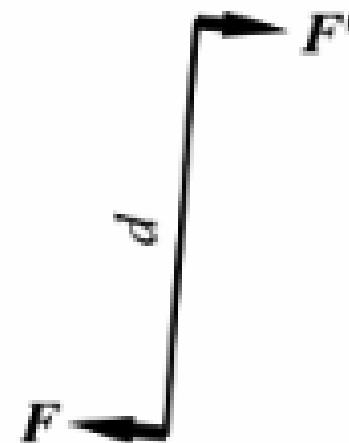
a)



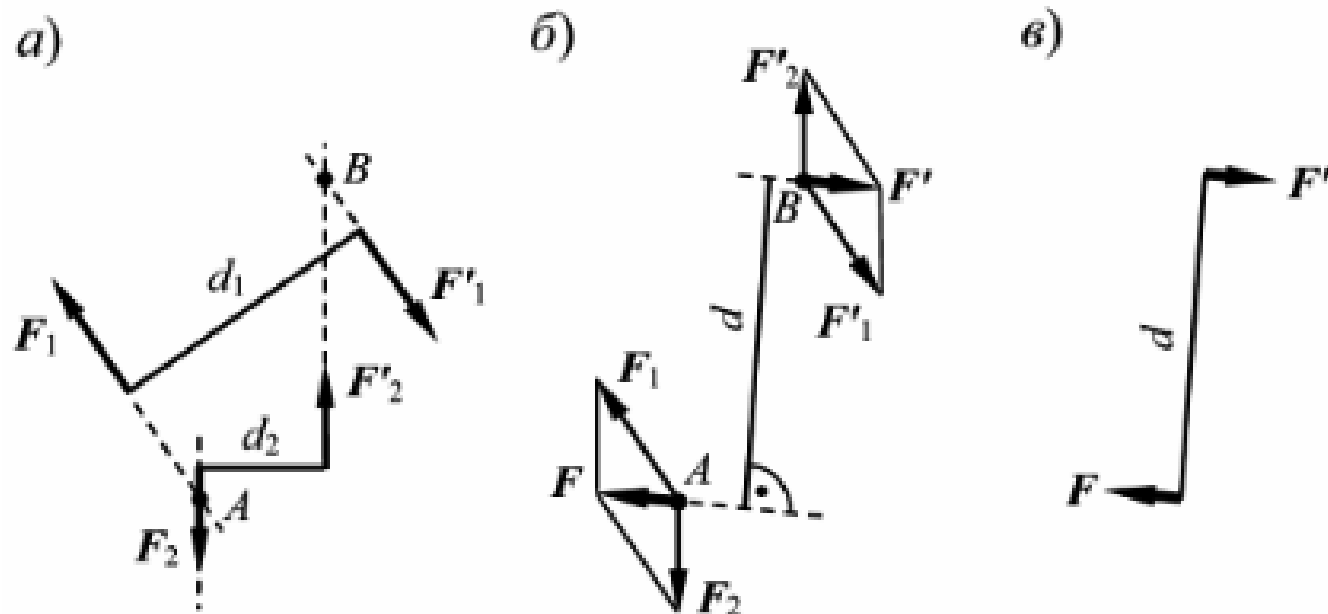
б)



в)



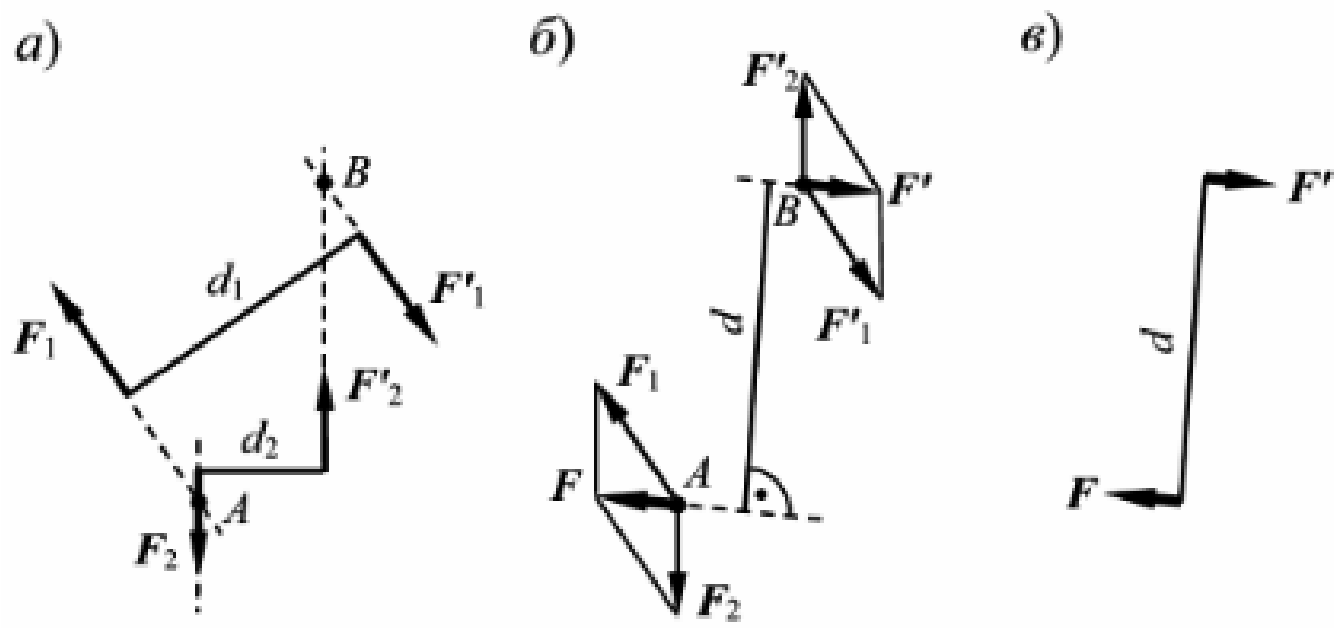
Решение. 1. Используя масштаб для сил и расстояний, вычерчиваем исходные пары сил. Проводим линии действия сил F_1 , F_2 и F'_1 , F'_2 до точек их пересечений. Получаем точки пересечения сил A , B (рис. *a*);



2. Перемещаем силы по линиям их действия в точки пересечения и складываем силы по правилу параллелограмма (рис. *б*).

3. Полученные в результате сложения силы (F, F') составляют результирующую пару сил с плечом d (рис. в).

Результирующая пара сил заменяет всю систему суммируемых пар сил, т.е. она эквивалентна исходной системе, ее знак определяет направление вращения тела в результате суммарного воздействия всех пар сил системы.



Механическое воздействие системы пар сил на тело определяется их моментами, которые являются скалярными величинами. Поэтому *сложение пар сил можно выполнять алгебраически, суммируя их моменты.*

Момент результирующей пары сил равен алгебраической сумме моментов, составляющих систему пар сил:

$$\sum_{i=1}^n M_i = M_1 + M_2 + \dots + M_n.$$

Равновесие системы, состоящей из пар сил, обеспечивается в том случае, если сумма их моментов равна нулю, иными словами, равновесие обеспечивается, когда механическое воздействие всех приложенных к телу пар сил равно нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0.$$

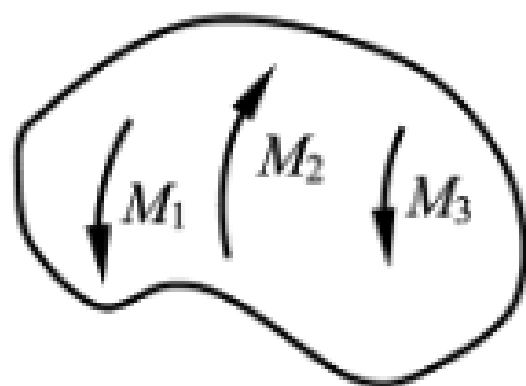
Правила суммирования моментов сил относительно точки те же, что и для моментов пар сил. Соответственно, если сумма моментов сил относительно точки равна нулю, тело относительно этой точки вращаться не будет, т.е. будет находиться в равновесии. Учитывая, что можно выбрать разные точки закрепления тела, в уравнение обязательно вводится обозначение точки. Условие равновесия моментов всех сил системы относительно точки A записывается как:

$$\sum_{i=1}^n M_{A(F_i)} = 0.$$

Часто применяют упрощенную форму записи: уравнение равновесия системы пар сил записывают как $\sum M = 0$; уравнение равновесия суммы моментов сил относительно точки A записывают как $\sum M_A = 0$.

Пример. На тело действуют три пары сил, имеющих моменты $M_1 = -25$ кН·м, $M_2 = +67$ кН·м, $M_3 = -15$ кН·м. Определить значение момента, который обеспечит равновесие тела (рис. а).

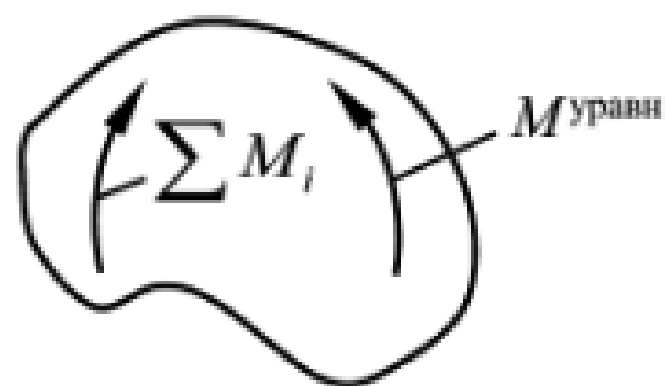
а)



б)



в)

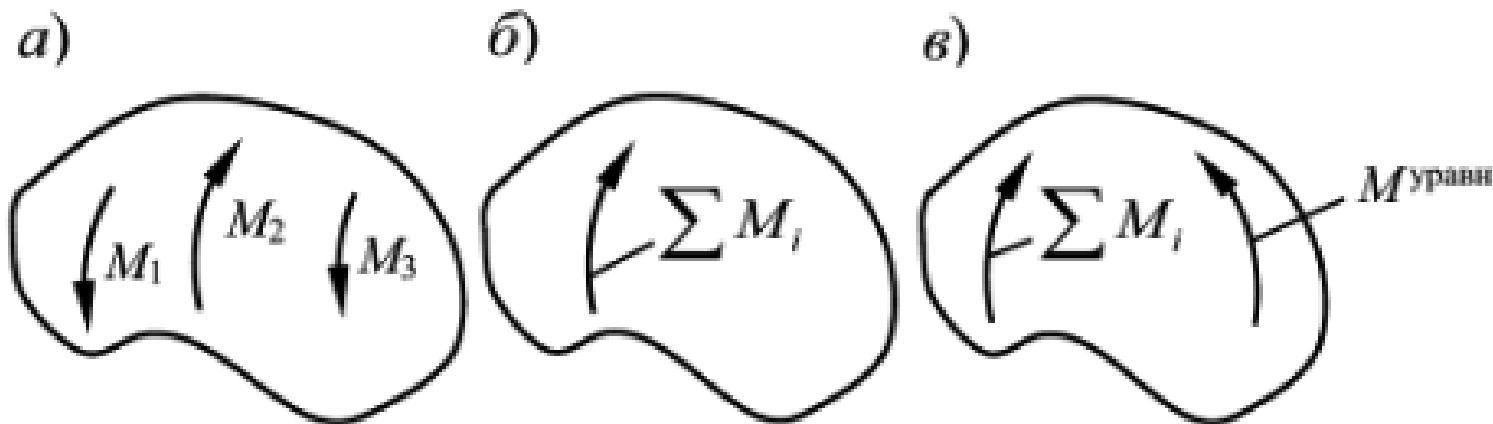


Решение. 1. Равновесие тела, на которое действует система моментов, обеспечивается при выполнении уравнения:

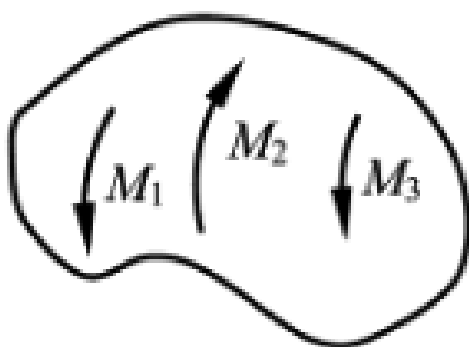
$$\sum_{i=1}^n M_i = 0. \text{ Суммируем действующие моменты}$$

$$\sum M_i = -M_1 + M_2 - M_3 = -25 + 67 - 15 = 27 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Полученный суммарный момент не равен нулю, следовательно, тело будет вращаться, т.е. оно не находится в равновесии (рис. б).



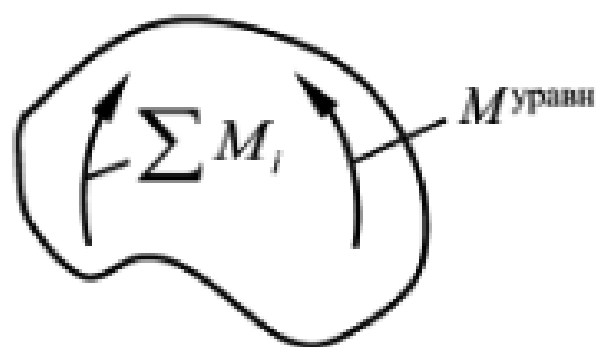
а)



б)



в)



2. Для обеспечения равновесия к телу необходимо приложить уравнивающий момент, равный по величине суммарному моменту, но противоположный по направлению

$$M_{уравн} = -27 \text{ кН}\cdot\text{м (рис. в).}$$