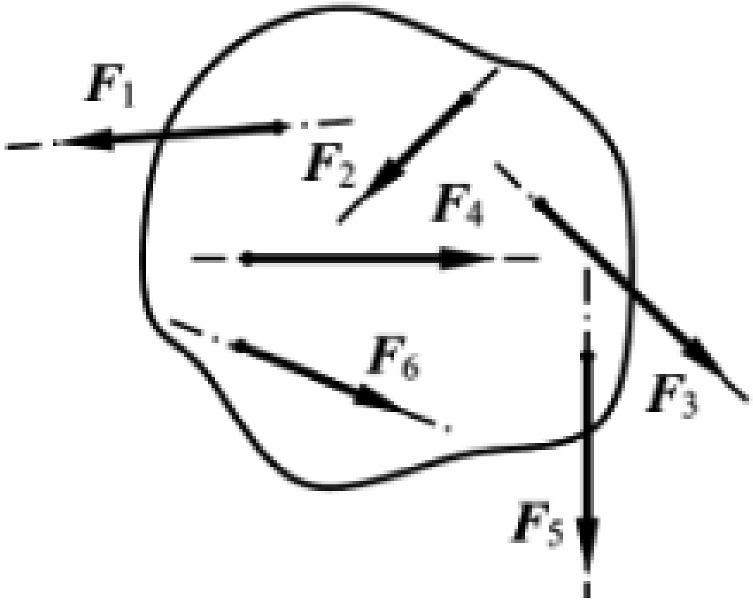
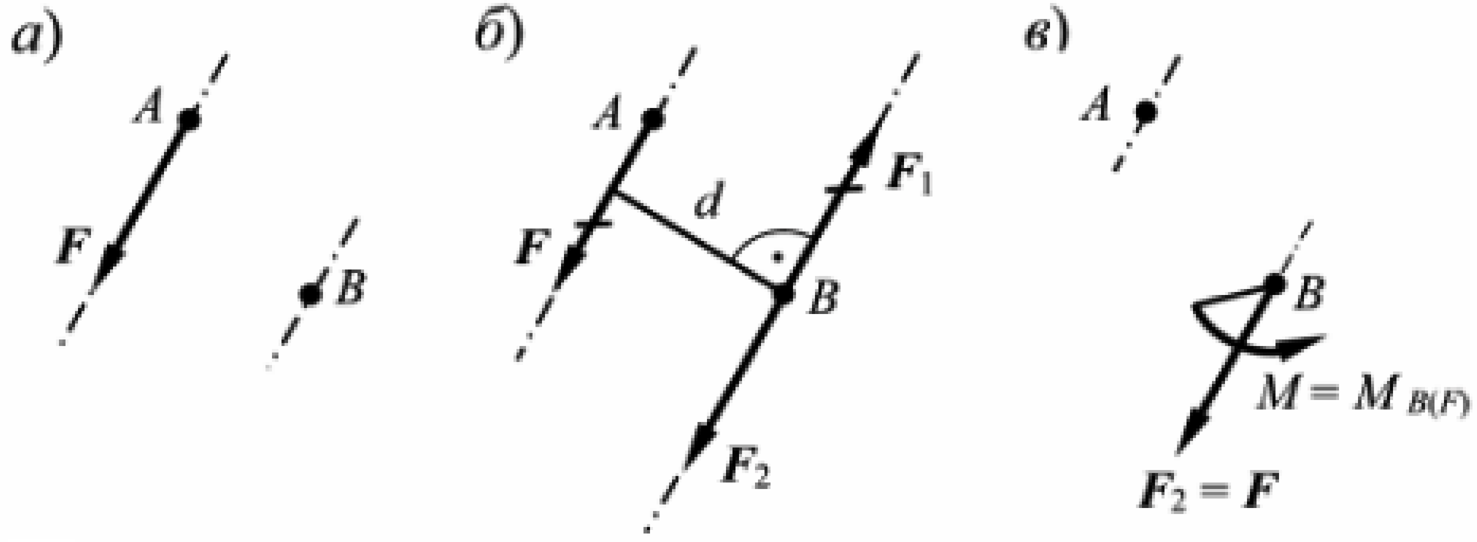
Плоская система произвольных сил

Как уже отмечалось, система сил, в которой линии их действия лежат в одной плоскости и не сходятся в одной точке, называется плоской системой произвольно расположенных сил.

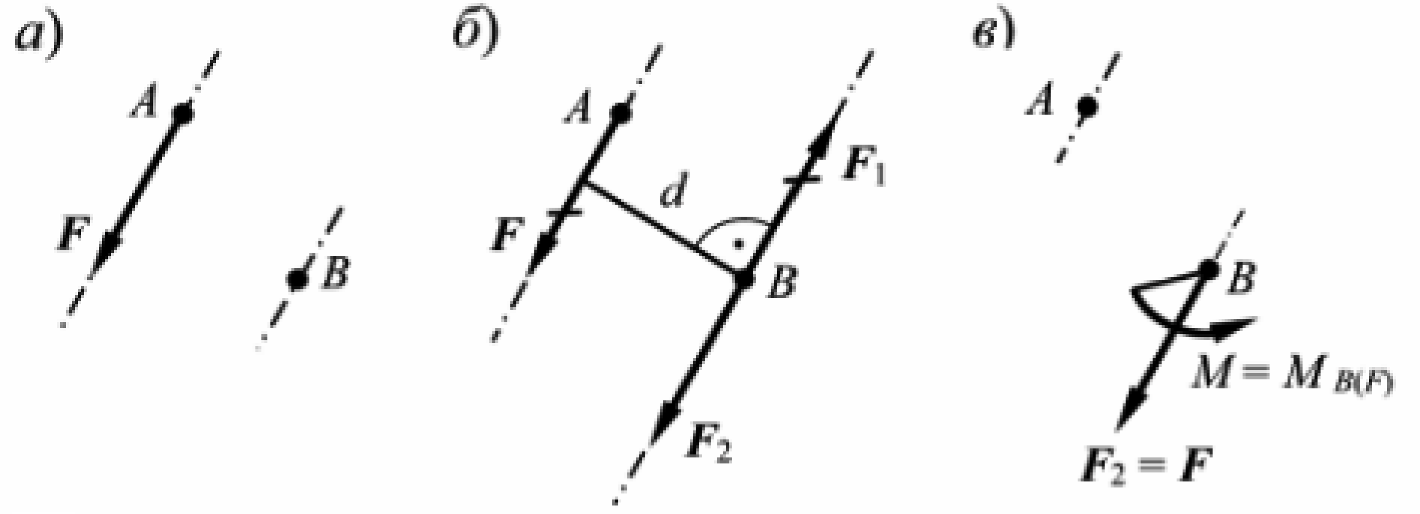


Для решения ряда практических задач часто требуется осуществлять перенос сил такой системы в точки, которые не лежат на линии действия этих сил. Рассмотрим перенос силы в произвольно выбранную точку. Подобный перенос силы сопровождается дополнительными требованиями, связанными с необходимостью сохранения равновесия системы, и называется приведением силы к точке.

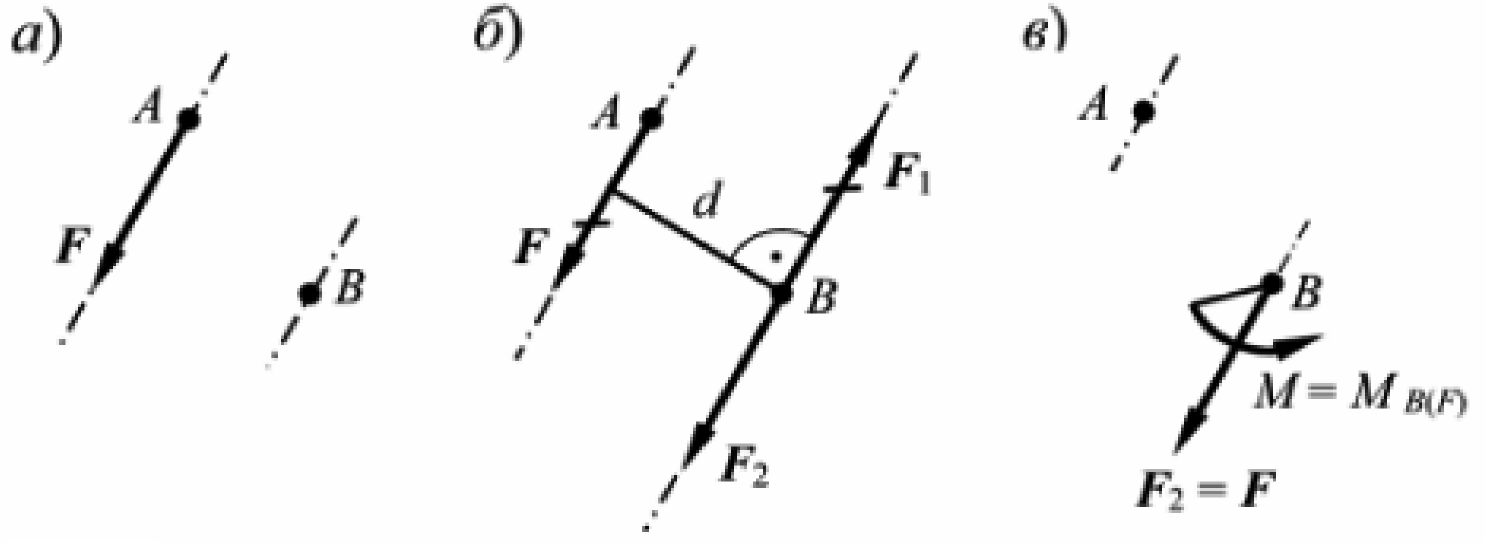
Сила $\boldsymbol{F}$ (рис. a) приложена к точке A, необходимо осуществить ее приведение (перенос) в точку B, которая не лежит на линии действия силы. Прикладываем в точке B две уравновешенные силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, равные по модулям силе $\boldsymbol{F}$, линия их действия принята параллельной линии действия силы $\boldsymbol{F}$. Поскольку силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ уравновешены (их сумма равна нулю), общее состояние системы сил не изменится.



Теперь в системе действует три силы. Модуль силы F_2 равен модулю силы F, и они действуют в одном направлении, тем самым мы осуществили перенос исходной силы в точку B. Оставшиеся силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_1$ равны по модулям, параллельны, направлены в противоположные стороны, и они составляют пару сил с плечом d. *Полученная пара сил называется* ***присоединенной***, она присоединена к силе $\boldsymbol{F}_2$. Момент присоединенной пары сил равен $M = M_{B(F)} = –Fd$ (рис. *б*).



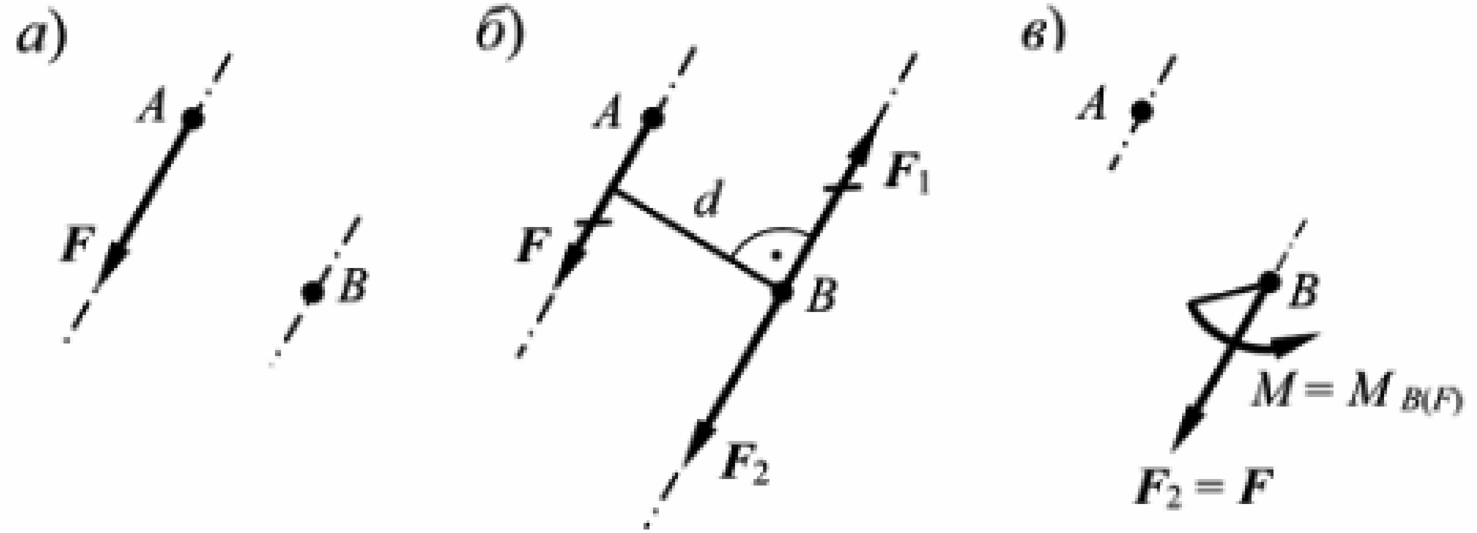
При приведении силы F к произвольной точке, не лежащей на ее линии действия, получается эквивалентная система, состоящая из этой силы и присоединенной пары сил, имеющей момент $M = \pm Fd$, где d – кратчайшее расстояние между точкой переноса и первоначальной линией действия силы (рис. *в*).



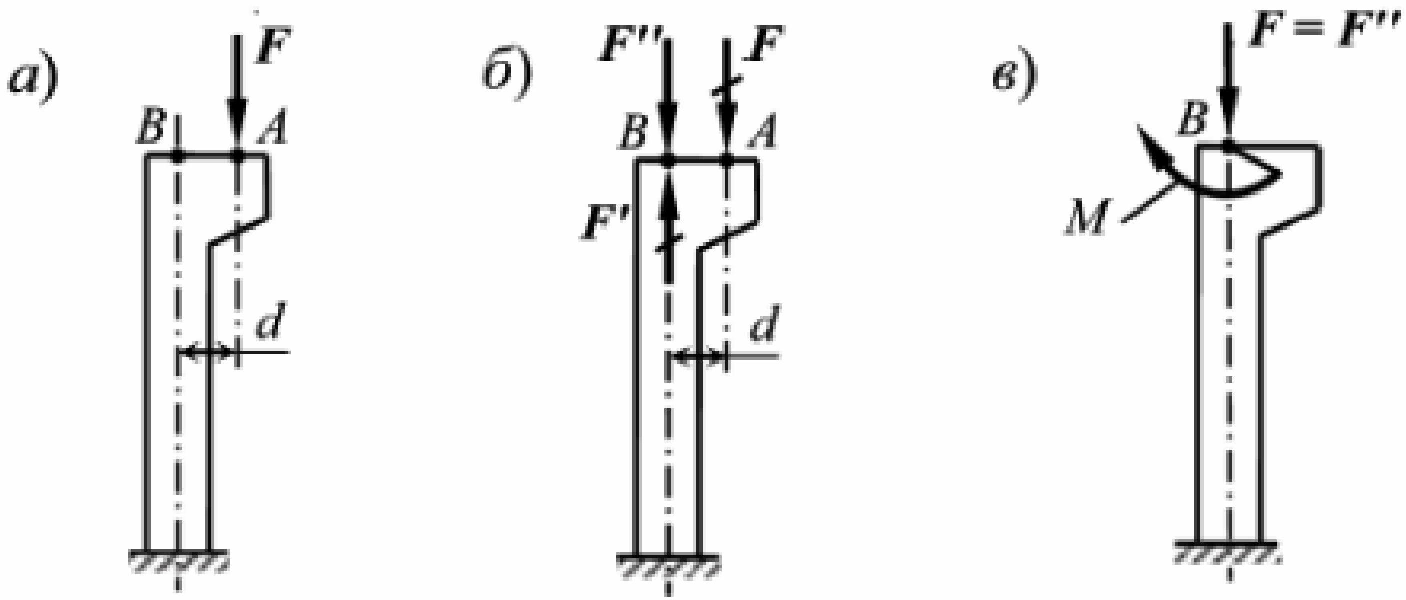
Приведение силы $\boldsymbol{F}$ к произвольно выбранной точке: *а*) исходная система (сила $\boldsymbol{F}$ приложена в точке A); *б*) приведение силы в точку B; *в*) система сил, эквивалентная исходной системе

Присоединенный момент M компенсирует момент, создаваемый перемещенной силой относительно начальной точки ее приложения.

Сила $\boldsymbol{F}$ может лежать слева и справа от точки приведения и создавать моменты, действующие как по часовой, так и против часовой стрелки (со знаком «плюс» или «минус»).

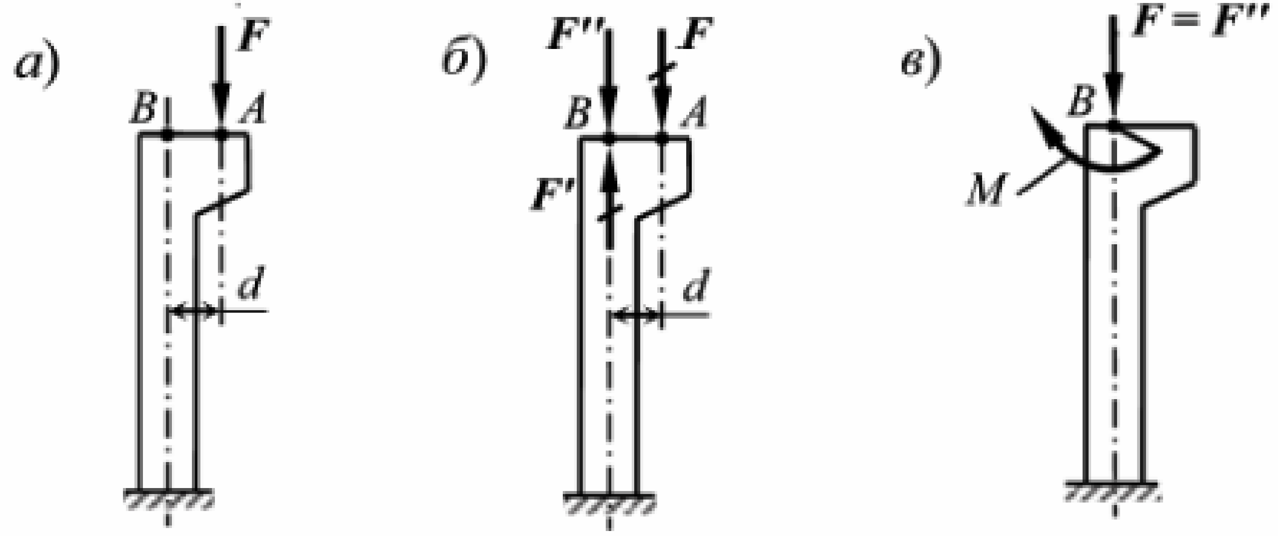


Пример. На защемленную в фундаменте колонну действует сила F = 50 кН, линия действия силы не совпадает с центром тяжести колонны (рис. *а*), расстояние d = 30 см. Требуется выполнить приведение силы относительно центра тяжести сечения колонны (точки B).



а) фактическое действие силы на колонну;
б), *в*) приведение силы $\boldsymbol{F}$ в точку B, расположенную по центру колонны

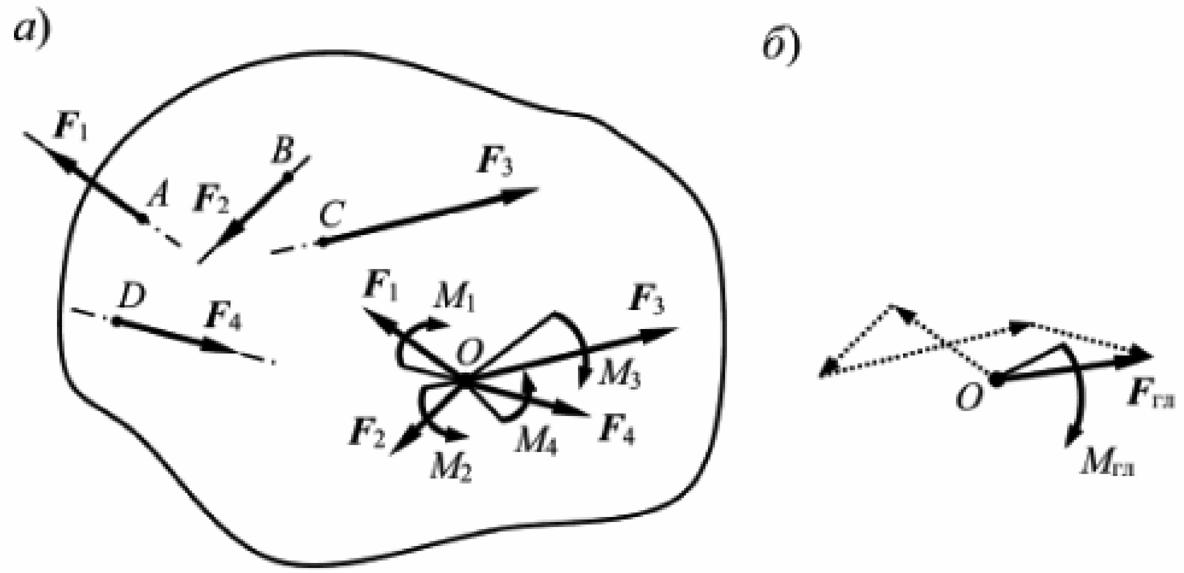
Решение. Прикладываем в точку B две силы, равные по модулю силе $F = 50$ кН, направленные по одной прямой в противоположные друг другу стороны $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}''$ (рис. *б*). Получаем, что в точке B действуют сила $F'' = F = 50$ кН и пара сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$), создающая присоединенный момент $M = Fd = 50 \cdot 30 = 1500$ кН·см. Направление действия момента соответствует вращению, создаваемому исходной силой $\boldsymbol{F}$ относительно точки B. Окончательная схема приведения силы изображена на рис. *в*.



а) фактическое действие силы на колонну;
б), *в*) приведение силы $\boldsymbol{F}$ в точку B, расположенную по центру колонны

Приведение системы сил к точке. Теорема Вариньона

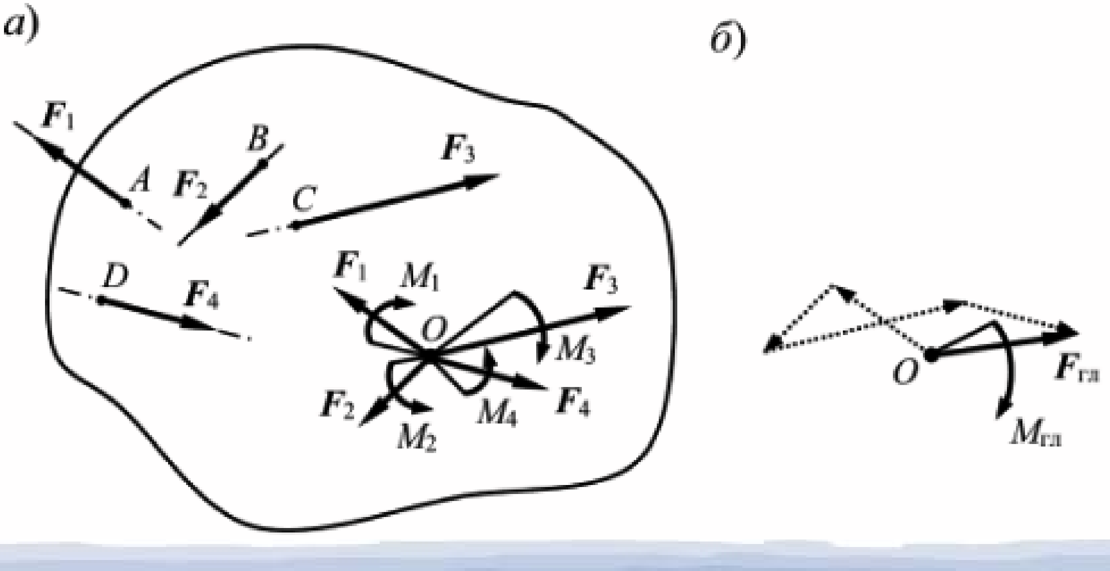
К выбранной точке можно осуществить приведение не только одной силы, но и системы, состоящей из произвольного числа сил.



Приведение плоской системы произвольно расположенных сил к точке O, центру приведения: *а*) система сил и приведение сил к точке O (центру приведения); *б*) главный вектор и главный момент системы сил (пунктиром показано суммирование векторов сил методом многоугольника)

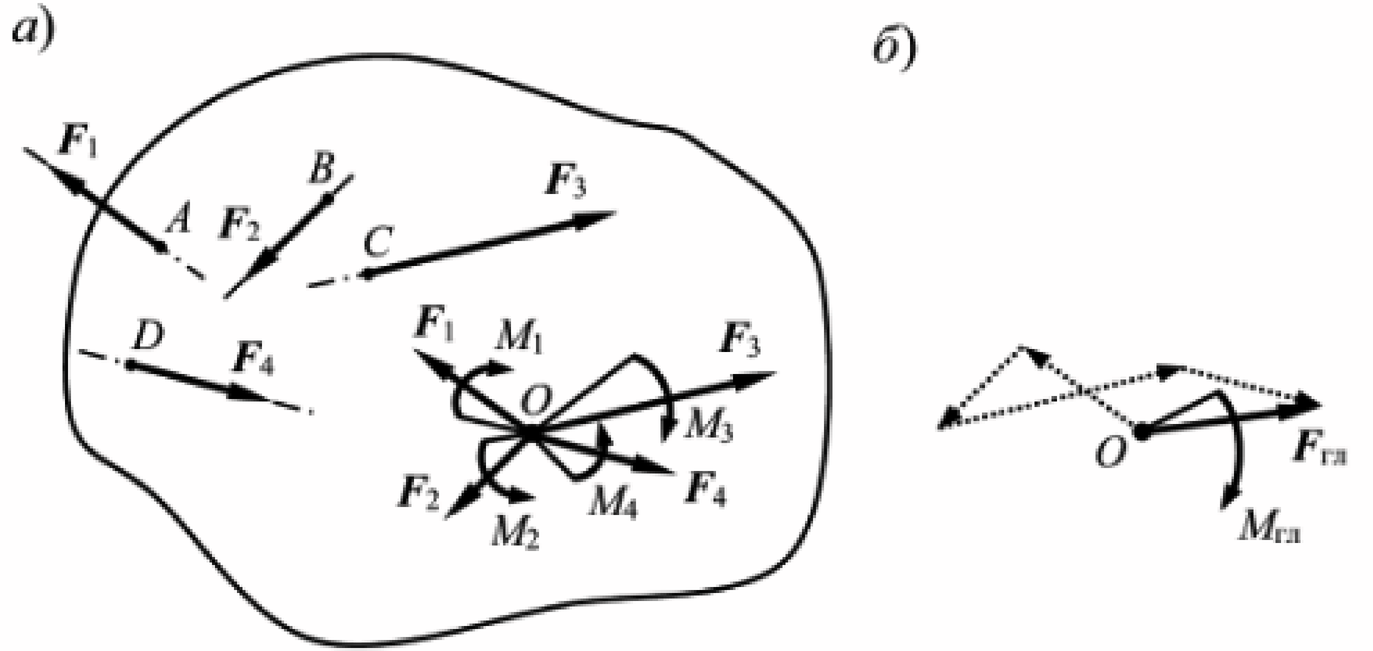
Например, к телу приложена плоская система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, приложенных в точках A, B, C, D, требуется привести силы системы к точке O, которая называется ***центром приведения сил***.

Перемещаем силу $\boldsymbol{F}_1$ в центр приведения сил (точку O), и так как линия действия перемещаемой силы не проходит через центр приведения, то возникает присоединенная пара сил с моментом M_1, который прикладываем в точку O (рис. *а*). Аналогично переносим все остальные силы системы со своими присоединенными моментами. Теперь все силы сходятся в одной точке, центре приведения системы, и их можно суммировать. Производим так же суммирование присоединенных моментов.

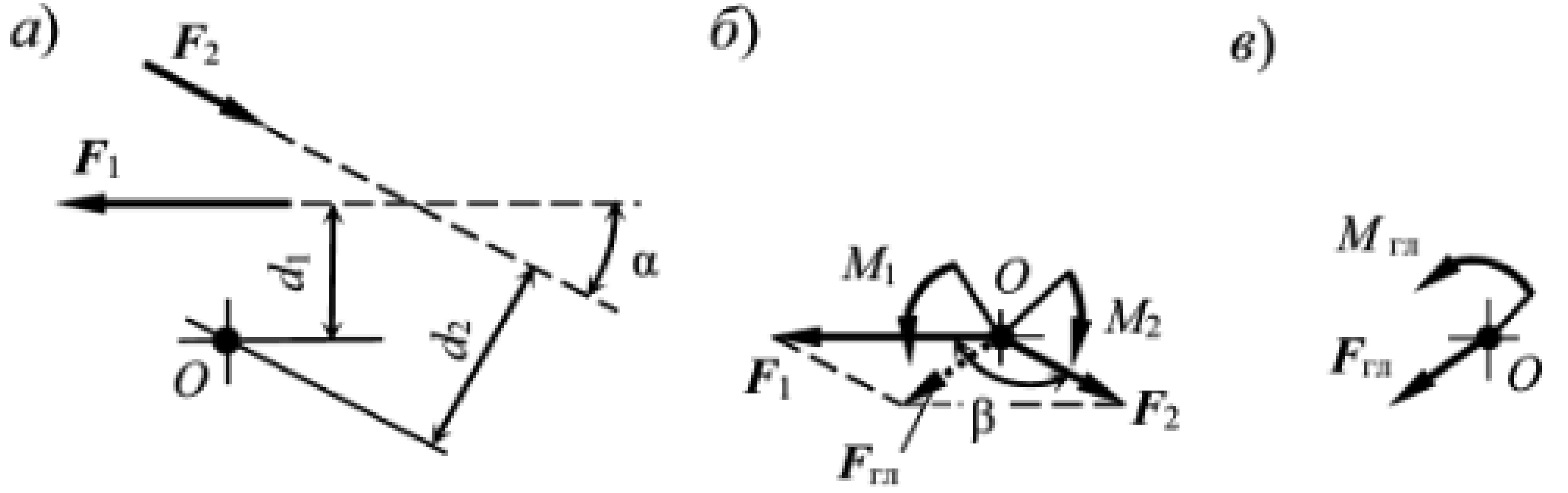


Если линия действия любой силы исходной системы проходит через центр приведения, то ее присоединенный момент равен нулю, иначе говоря, такую силу можно просто переместить в точку приведения.

В результате суммирования всех приведенных к точке сил получаем одну силу, которая называется главным вектором $\boldsymbol{F}_{гл}$*, а в результате суммирования всех присоединенных моментов получаем главный момент* $M_{гл}$ (рис. *б*).



Пример. Выполнить приведение двух сил относительно точки O. Силы F_1 = 21 кН, F_2 =12 кН, плечи этих сил d_1 = 10 см, d_2 = 15 см, угол между силами β = (180º – α) = (180º – 28º) = 152º.



Приведение сил к центру приведения, точке O:
а) исходная система сил; *б*), *в*) результат приведения сил к точке

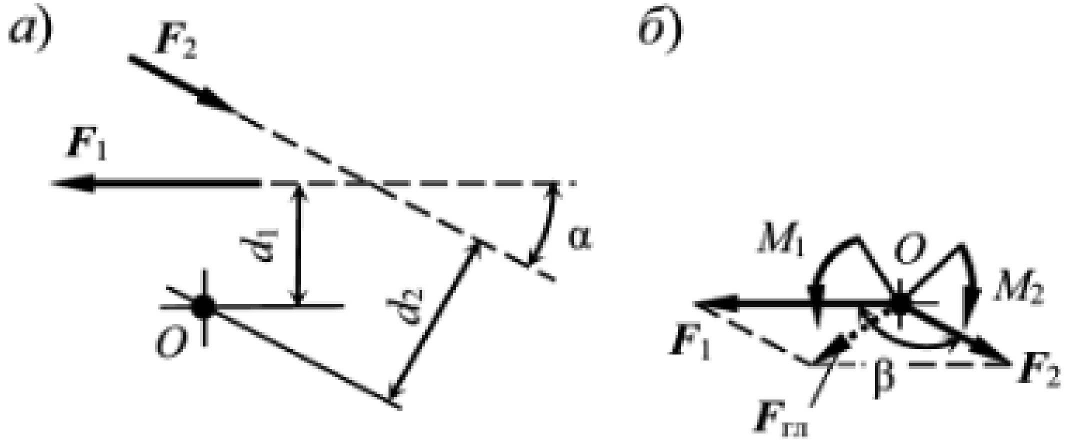
Решение. 1. Приводим силы к точке *O* (рис. *б*).

2. Суммируем модули сил по формуле и определяем значение главного вектора:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\beta} =$$

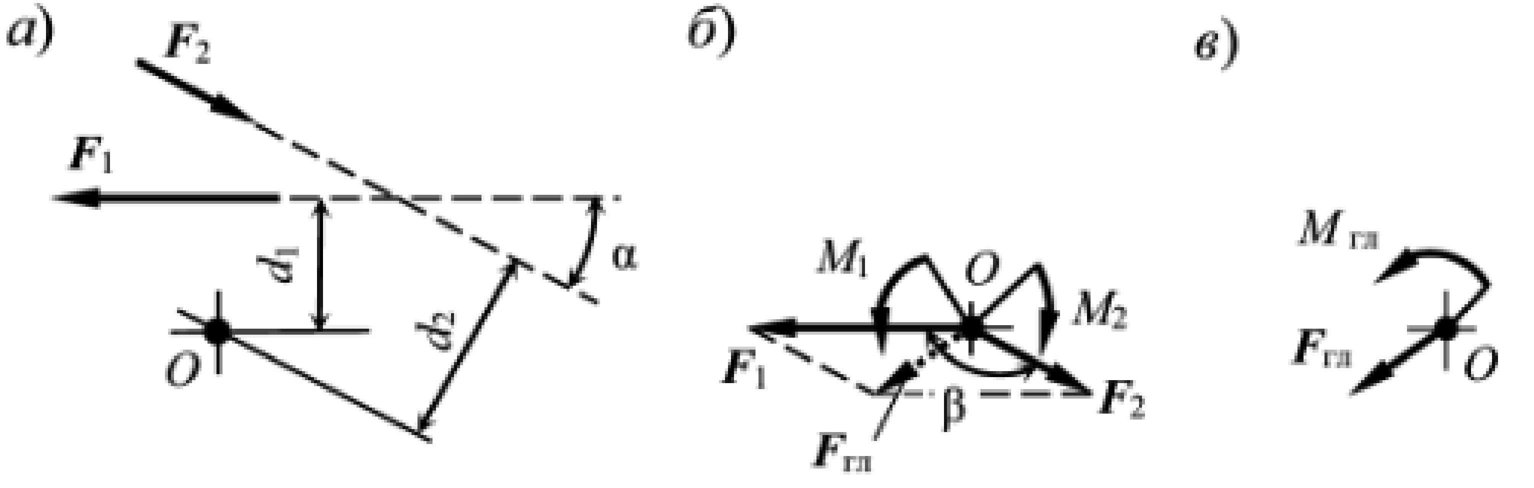
$$\sqrt{21^2 + 12^2 + 2\cdot 21\cdot 12\cdot(-0{,}883)} =$$

$$= 11{,}83 \text{ кН.}$$



Приведение сил к центру приведения, точке *O*:
а) исходная система сил; *б*), *в*) результат приведения сил к точке

3. Определяем главный момент $M_{гл} = -M_1 + M_2 = -21 \cdot 10 + 12 \cdot 15 = -30$ кН·см. Знак «минус» показывает, что направление вращения главного момента $M_{гл}$ происходит против часовой стрелки. Окончательный результат приведения сил к точке O показан на рис. *в*.

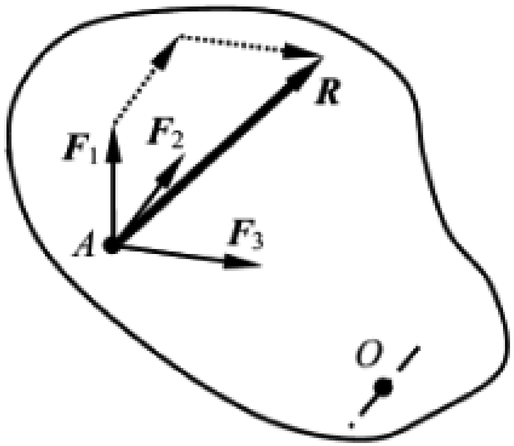


Приведение сил к центру приведения, точке O:
а) исходная система сил; *б*), *в*) результат приведения сил к точке

Решение ряда задач технической механики выполняется с применением теоремы Вариньона о моменте, который создает равнодействующая исходной системы сил относительно точки приведения.

Теорема Вариньона. Момент равнодействующей относительно произвольного центра приведения (точки *O*) равен сумме моментов всех сил системы относительного того же центра.

$$M_{O(R)} = \sum_{i=1}^{n} M_{O(Fi)}.$$



Исходная система сил с точкой схождения *A* и точкой приведения *O*

В результате приведения систем сил возможны четыре варианта состояния систем:

1. $F_{гл} \neq 0$, $M_{гл} \neq 0$ – система сил приводится к главному вектору и главному моменту. В этом случае главный вектор и пару сил, соответствующую главному моменту, можно заменить одной силой – равнодействующей. Равнодействующая равна главному вектору $R = F_{гл}$ и ее линия действия находится на расстоянии $d = M_{(гл)} / F_{гл}$ по перпендикуляру от точки приведения, слева или справа от главного вектора, учитывая направление вращения главного момента $M_{(гл)} = R\,d$.

2. $F_{гл} = 0$, $M_{гл} \neq 0$ – система сил не имеет равнодействующей и эквивалентна паре сил с моментом.

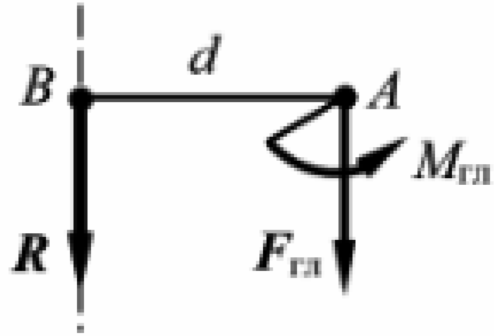
3. $F_{гл} \neq 0$, $M_{гл} = 0$ – центр приведения лежит на линии действия равнодействующей.

4. $F_{гл} = 0$, $M_{гл} = 0$ – система сил после приведения находится в равновесии.

Пример. Заданы главный вектор $F_{гл}$ = 60 Н и главный момент $M_{гл}$ = –126 Н·см (рис. *а*). Определить кратчайшее расстояние от точки *A* до точки *B*, лежащей на линии действия равнодействующей, и положение равнодействующей.

а)

б)



Решение. 1. Главный момент определяется как $M_{гл} = Rd$, где d перпендикуляр от линии действия равнодействующей до главного вектора (кратчайшее расстояние). Отсюда $d = M_{гл} / R$, а учитывая, что $R = F_{гл}$ получаем $d = |M_{гл} / F_{гл}| = |126 / 60| = 2{,}1$ см.

2. Положение линии действия равнодействующей определяем исходя из того, что равнодействующая параллельна главному вектору и относительно точки A создает отрицательный момент, т.е. расположена слева от точки A (рис. *б*).

Условия равновесия плоской системы сил

В соответствии с первой аксиомой статики тело будет находиться в равновесии, если действующая на него система сил взаимно уравновешивается (эквивалентна нулю).

Плоская система сил может быть приведена к главному вектору и главному моменту и, соответственно, будет в равновесии, если главный вектор равен нулю и главный момент относительно любой точки тела равен нулю.

В случае равенства нулю главного вектора его проекции на координатные оси $F_{гл,x}$, $F_{гл,y}$ также равны нулю. Следовательно, **уравнения равновесия плоской системы сил** можно записать как:

$$F_{гл,x} = \sum F_{i,x} = 0;$$

$$F_{гл,y} = \sum F_{i\,y} = 0;$$

$$M_{гл} = \sum M_{A\,(Fi)} = 0$$

Или в упрощенной форме уравнения равновесия плоской системы сил запишем в виде:

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$\sum M_A = 0.$$

Эти уравнения равновесия называют основными уравнениями равновесия.

Система сил, лежащих в одной плоскости, считается уравновешенной, если алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равны нулю и равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки.

В некоторых случаях удобней пользоваться уравнениями равновесия, содержащими два уравнения, устанавливающих равенство нулю всех моментов относительно двух различных точек, и одного уравнения, определяющего равенство нулю проекций всех сил на ось:

$$\sum X = 0;\ \sum M_A = 0;\ \sum M_B = 0,$$

ось x в этом случае не должна лежать перпендикулярно линии, соединяющей точки AB. При использовании такой системы уравнений, уравнение, определяющее равенство нулю проекций всех сил ось y, $\sum Y = 0$, применяется как дополнительное, позволяющее выполнять проверку расчетов.

Может применяться и третья форма уравнений равновесия, устанавливающая равенство нулю суммы моментов всех сил системы относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

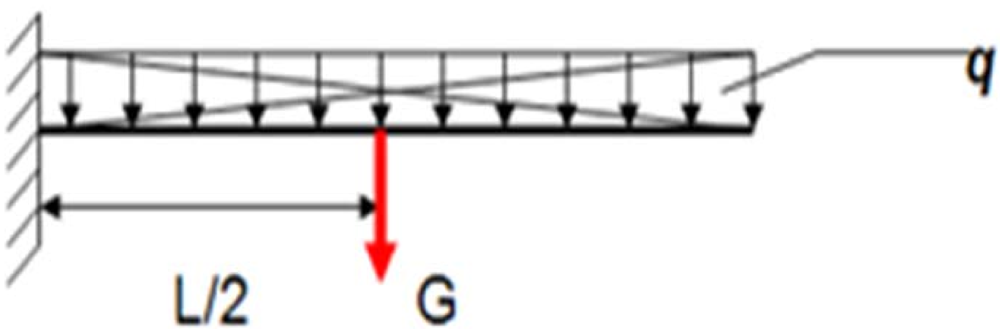
$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0,$$

в качестве дополнительных уравнений, по которым можно выполнять проверку расчетов в этом случае, применяют уравнения:

$$\sum Y = 0; \sum X = 0.$$

Балочные системы, классификация нагрузок, виды опор

Балки предназначены для восприятия поперечных нагрузок.
По способу приложения нагрузки делятся на сосредоточенные (действуют на точку) ***и распределенные*** (действуют на значительную площадь или длину).

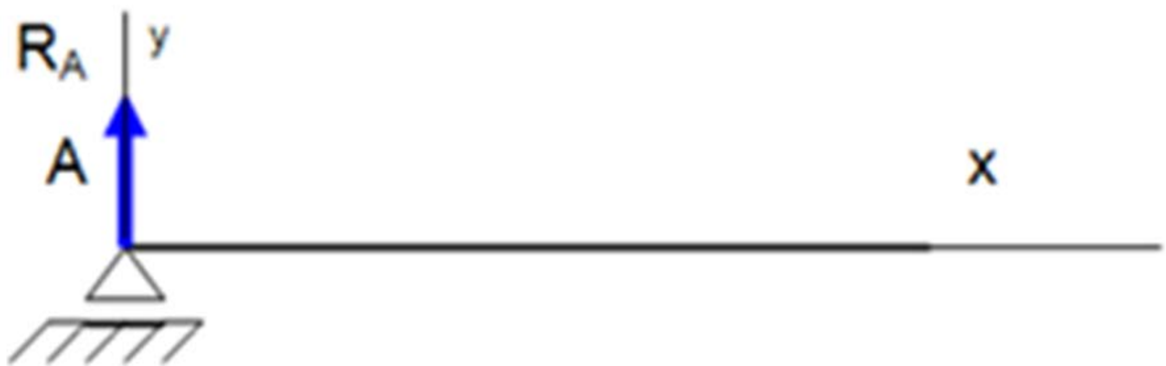


q - интенсивность нагрузки, кН/м G=*qL* – равнодействующая распределенной нагрузки.

Балки имеют опорные устройства для сопряжения их с другими элементами и передачи на них усилий.

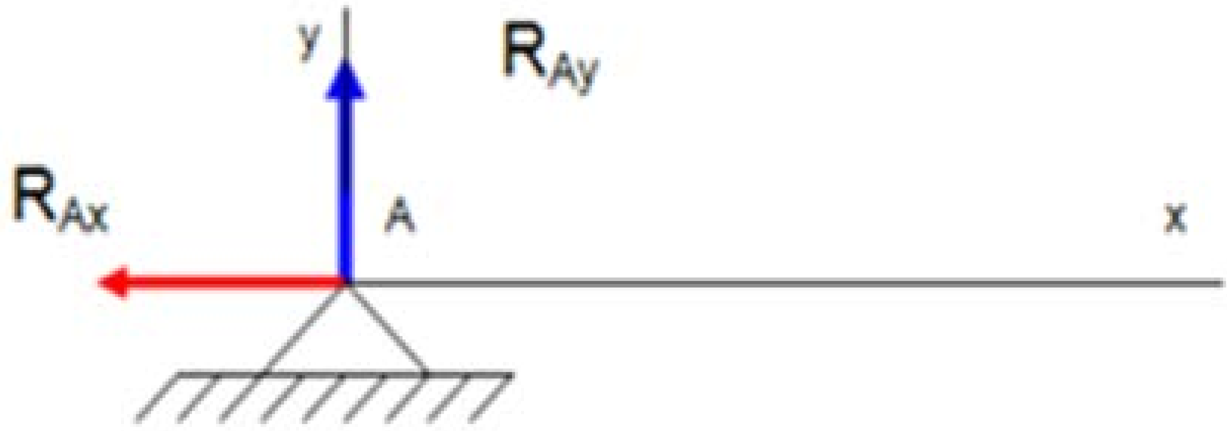
Применяются следующие виды опор:

- шарнирно-подвижная



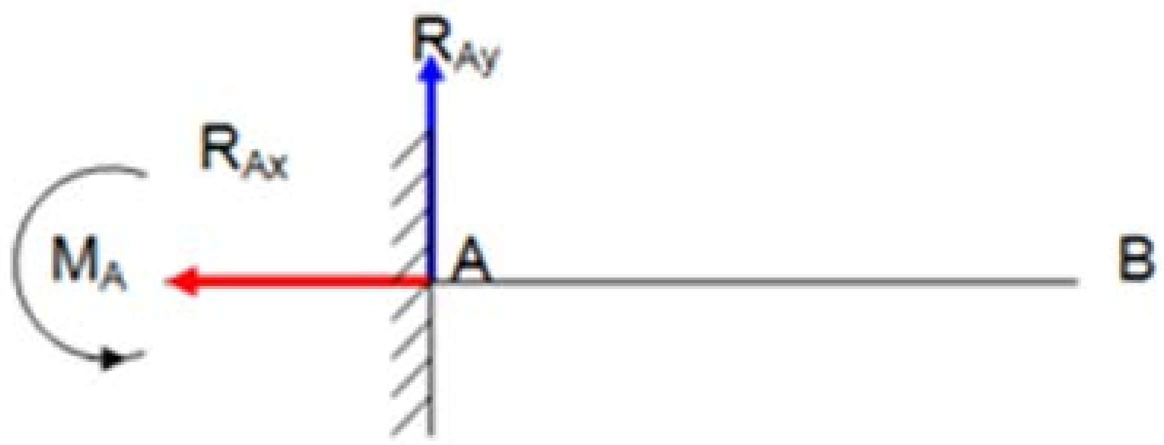
Эта опора допускает поворот вокруг оси и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

- шарнирно-неподвижная



Эта опора допускает поворот вокруг оси, но не допускает никаких линейных перемещений. Направление и значение опорной реакции неизвестно, поэтому заменяется двумя составляющими R_{Ay} и $R_{Ax,,}$ действующими вдоль соответствующих осей координат.

- жесткая заделка (защемление)



Опора не допускает перемещений и поворотов. Неизвестны не только направление и значение опорной реакции, но и точка её приложения. Поэтому заделку заменяют двумя составляющими R_{Ay} , R_{Ax} и моментом M_{A}.

Для определения этих неизвестных удобно использовать ***систему уравнений:***

$\sum F_{kx} = 0,$
$\sum F_{ky} = 0,$
$\sum m_A(F_к)= 0.$

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение моментов относительно любой точки на консольной балке, например точка В:

$\sum m_B(F_к)= 0.$