# Пространственная система сил

## Система сходящихся сил
## и проекции силы на оси координат в пространстве

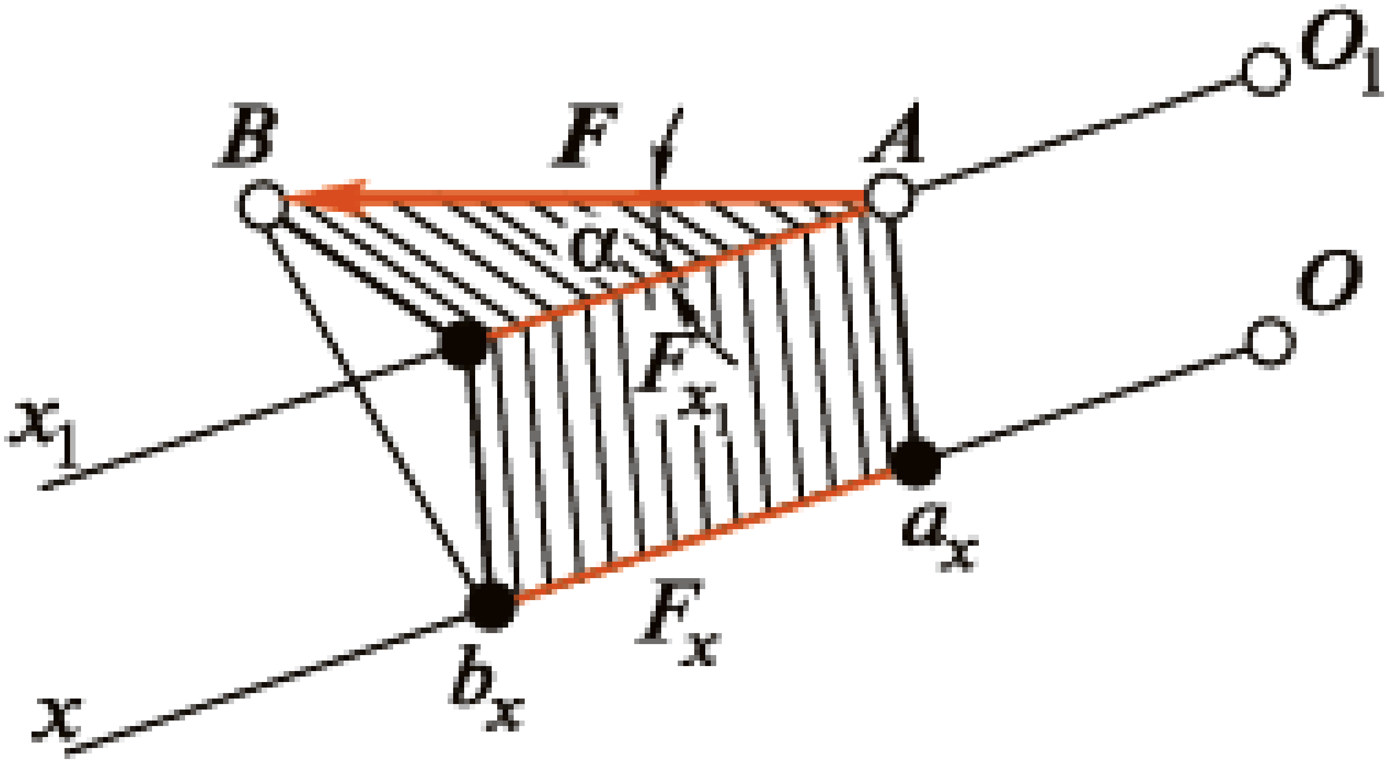
Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется *пространственной*.

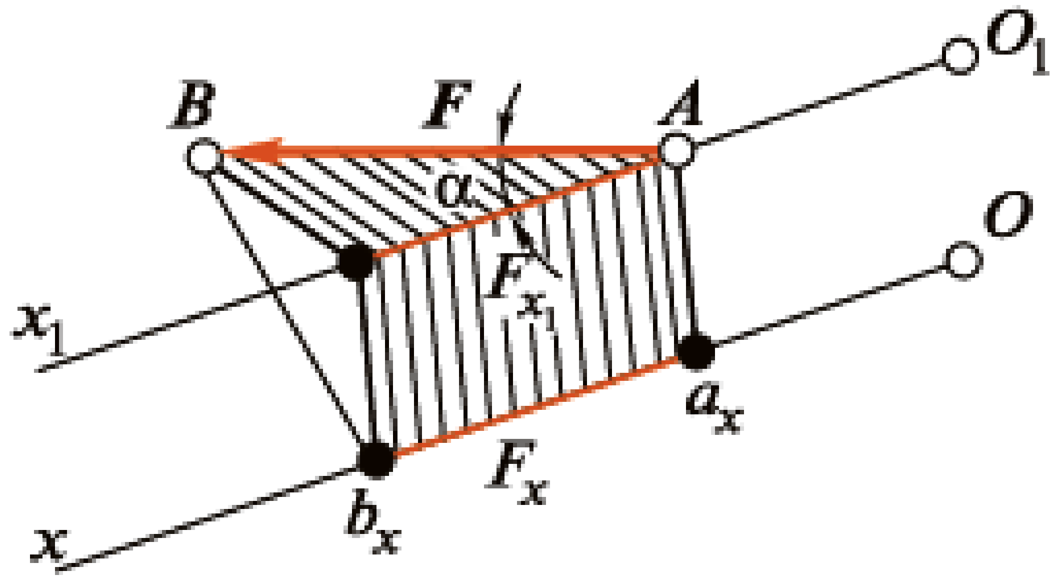
Пространственная система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке.

**Теорема.** *Пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.*

Силовой многоугольник пространственной системы сил не лежит в одной плоскости, поэтому геометрический и графический способы нахождения равнодействующей неприемлемы, а применяется аналитический способ (метод проекций).

Определение проекции силы на ось остается прежним (*как в плоской системе*). Если сила и ось не лежат в одной плоскости, то проецирующие перпендикуляры также не лежат в одной плоскости.






Для того чтобы определить, чему равна проекция силы ***F*** на ось *Ox*, следует мысленно провести через начало или конец силы ось $O_1x_1$, параллельную данной оси *Ox*, тогда $F_x = F\cos\alpha$, так как $F_x = F_{x1}$.

Правило знаков для проекции остается прежним.

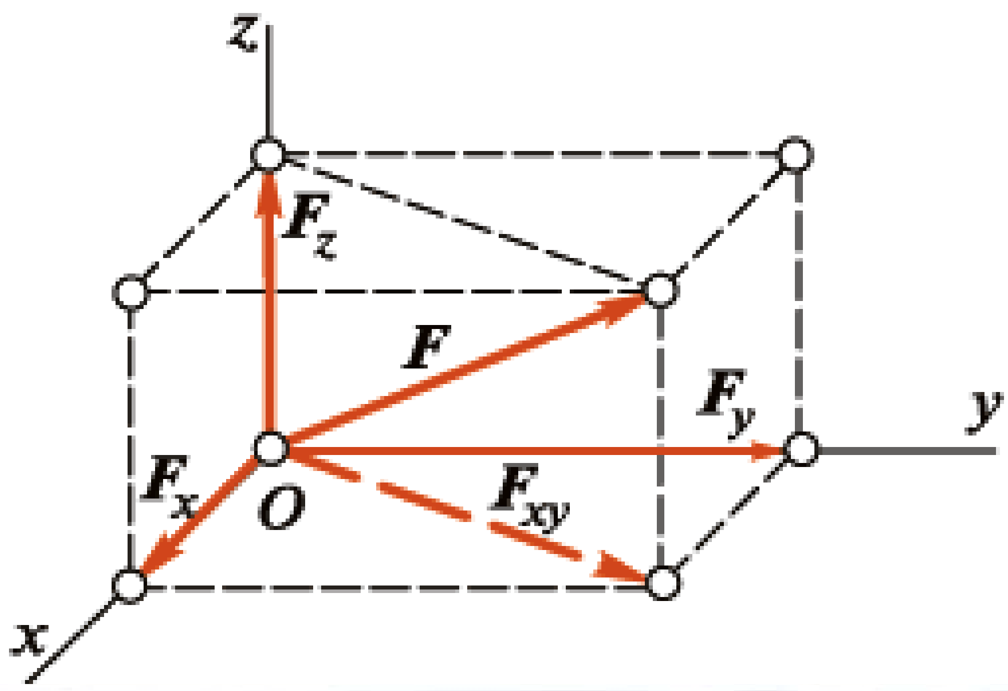
Если вектор силы *параллелен оси*, то он проецируется на эту ось в *натуральную величину*.

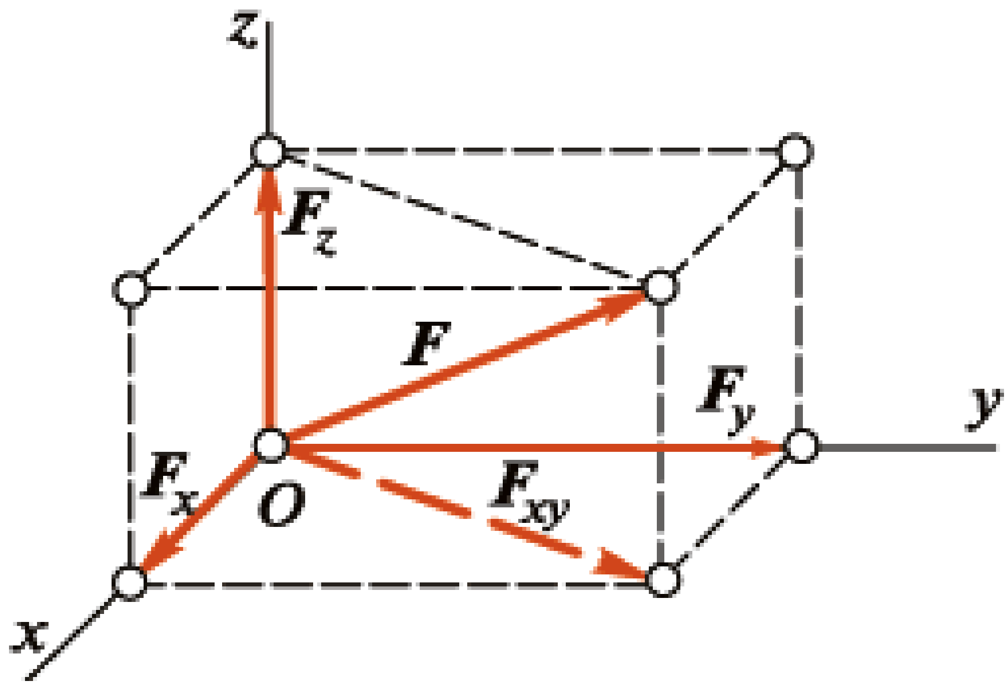
Если вектор силы *лежит в плоскости*, *перпендикулярной оси*, то его проекция на эту ось *равна нулю*.

# Разложение силы по трем осям координат и условия равновесия системы сходящихся сил

Пусть дана сила ***F***. Возьмем систему координат так, что бы начало координат совпадало с началом вектора силы ***F***. Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость *xy* и разложим силу ***F*** на составляющие $\boldsymbol{F}_{xy}$ и $\boldsymbol{F}_z$, а составляющую $\boldsymbol{F}_{xy}$ — на составляющие $\boldsymbol{F}_x$ и $\boldsymbol{F}_y$. Тогда

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z.$$






Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составляющие ***F**x*, ***F**y*, ***F**z* являются ребрами, а сила ***F*** — диагональю.

Из изложенного можно сделать вывод: *равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах*.

Зная проекции силы на три взаимно- перпендикулярные оси координат, можно определить модуль вектора силы по формуле:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Проекции силы на три взаимно- перпендикулярные оси и составляющие силы, направленные по этим осям, равны по модулю, следовательно, проекции равнодействующей равны:

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y; \quad F_{\Sigma z} = \sum Z.$$

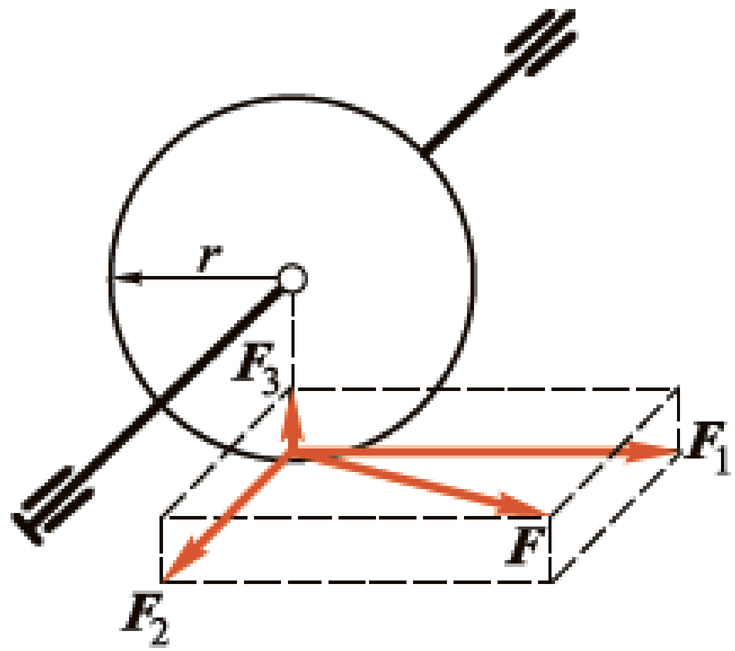
Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

# Момент силы относительно оси

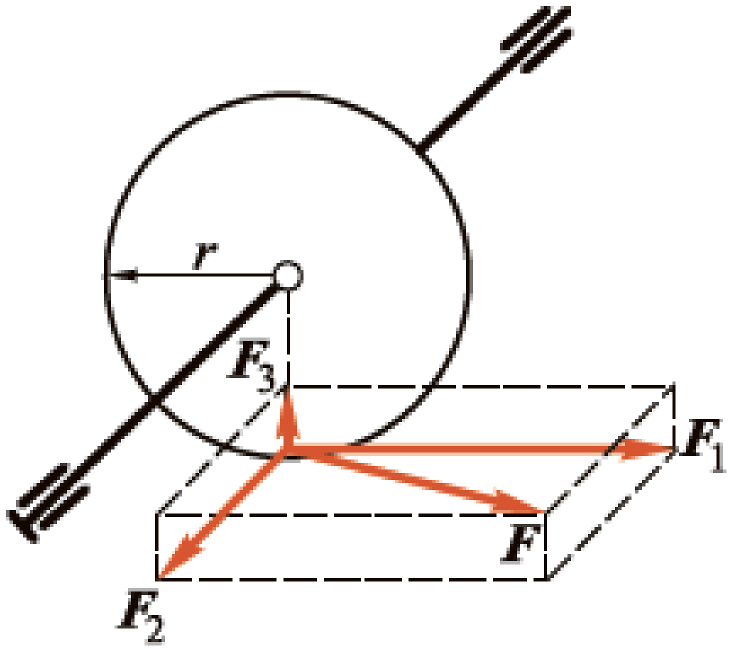
Рассмотрим колесо червячной передачи, закрепленное на валу, вращающемуся в подшипниках. Червяк действует на червячное колесо силой ***F***, не лежащей в плоскости, перпендикулярной оси.

Разложим силу ***F*** на три взаимно-перпендикулярные составляющие $F_1$, $F_2$ и $F_3$. Составляющую $F_1$ назовем окружной силой, составляющую $F_2$ — осевой силой, а составляющую $F_3$ — радиальной силой.



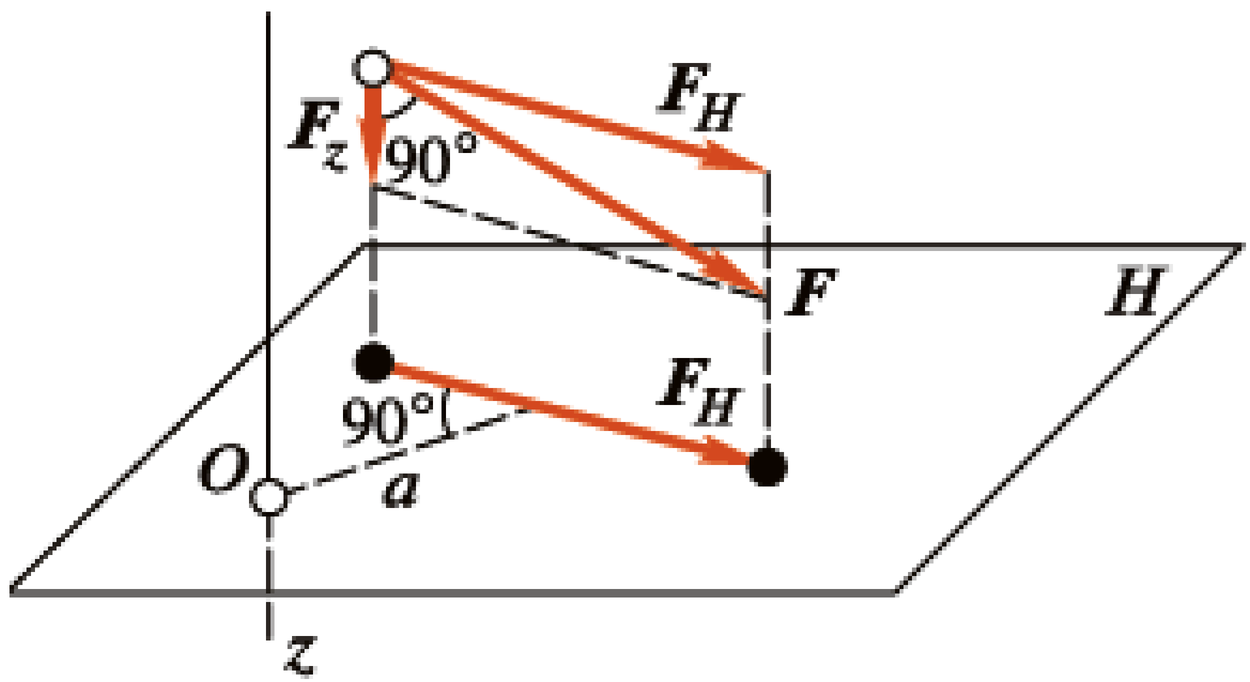
Составляющая **$F_1$** вызывает вращательное действие, которое измеряется произведением **$F_1 r$** ; составляющая **$F_2$** стремится сдвинуть колесо вдоль оси; составляющая **$F_3$** стремится изогнуть ось колеса, а вращательное действие этих сил относительно оси равно нулю.

Таким образом, если нужно найти момент силы относительно оси, то следует принимать в расчет только составляющую **$F_1$**, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, и не пересекающую ось.



*Моментом силы относительно оси называется величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

$$M_z(F) = F_н a.$$

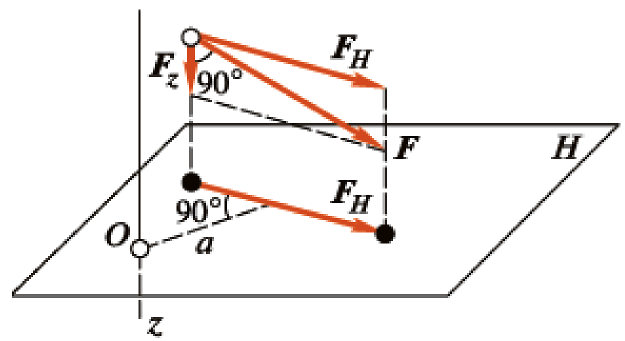


*Момент силы считается положительным, если смотреть с положительного конца оси и сила стремится вызвать вращение против часовой стрелки, момент силы считаем отрицательным, если она стремится вызвать вращение по часовой стрелке.*

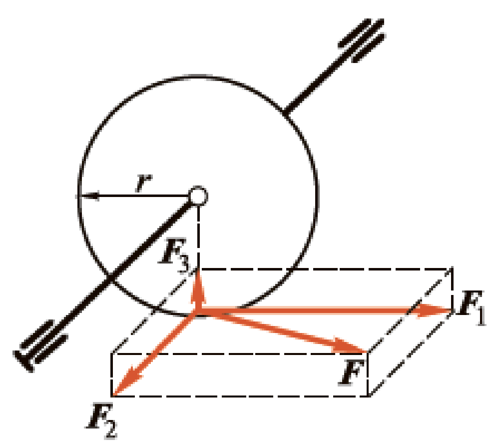
Момент силы относительно оси *не меняется* при перемещении силы вдоль линии ее действия.

Момент силы относительно оси *равен нулю* в двух случаях (не считая случаев, когда сила равна нулю или действует вдоль оси):

1) если *вектор силы параллелен оси*, так как при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю (сила ***F**z*);




2) если *линия действия силы пересекает ось*, так как при этом плечо равно нулю (сила ***F**3*).



## Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил

*Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат была равна нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей была равна нулю:*

$$\sum X = 0; \quad \sum M_x(F_i) = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \sum M_y(F_i) = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0.$$

Тело, лежащее на плоскости, имеет три степени свободы, а именно: возможность перемещения в направлениях двух взаимно-перпендикулярных осей, лежащих в этой плоскости, и возможность вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости.

*Трем степеням свободы тела на плоскости соответствуют три условия равновесия*.

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно-перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей.

Таким образом, *шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия*.

# Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона )

**Теорема.** Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Пусть даны пространственная система $n$ произвольно расположенных сил, приложенных к телу, и равнодействующая этой системы $\boldsymbol{F}_\Sigma$:

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n) \equiv \boldsymbol{F}_\Sigma.$$

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой $\boldsymbol{F}'_\Sigma$ по модулю равна силе $\boldsymbol{F}_\Sigma$ и направлена по той же линии действия в противоположную сторону.

Сила $\boldsymbol{F}'_\Sigma$ для данной системы является уравновешивающей силой и вместе с данными силами образует уравновешенную систему:

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n, \boldsymbol{F}'_\Sigma) \equiv 0,$$

также

$$(\boldsymbol{F}_\Sigma, \boldsymbol{F}'_\Sigma) \equiv 0.$$

Так как обе записанные выше системы эквивалентны нулю, т. е. уравновешены, то к ним можно применить любое условие равновесия, например

$$\sum M_x(F_i) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + ... + M_x(F_n) + M_x(F'_\Sigma) = 0;$$

$$M_x(F_\Sigma) + M_x(F'_\Sigma) = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то будут равны и левые:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + ... + M_x(F_n) = M_x(F_\Sigma),$$

поскольку члены $M_x(F'_\Sigma)$ взаимно уничтожились.

Итак,

$$\sum M_x(F_i) = M_x(F_\Sigma);$$

теорема доказана.