

КИНЕМАТИКА

Кинематика - часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют ***системой отсчета***.

Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют ***абсолютным***; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют ***относительным***.

Способы задания движения материальной точки

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета.

В зависимости от формы траектории движение точки бывает двух видов: *прямолинейное* и *криволинейное*.

Рассмотрим два способа задания движения точки: *естественный* и *координатный*.

Естественный способ заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения).

Уравнение движения в общем виде записывается следующим образом:

$$s = f(t),$$

где s — расстояние точки от начального положения, являющееся функцией времени; t — время движения точки от начального момента.

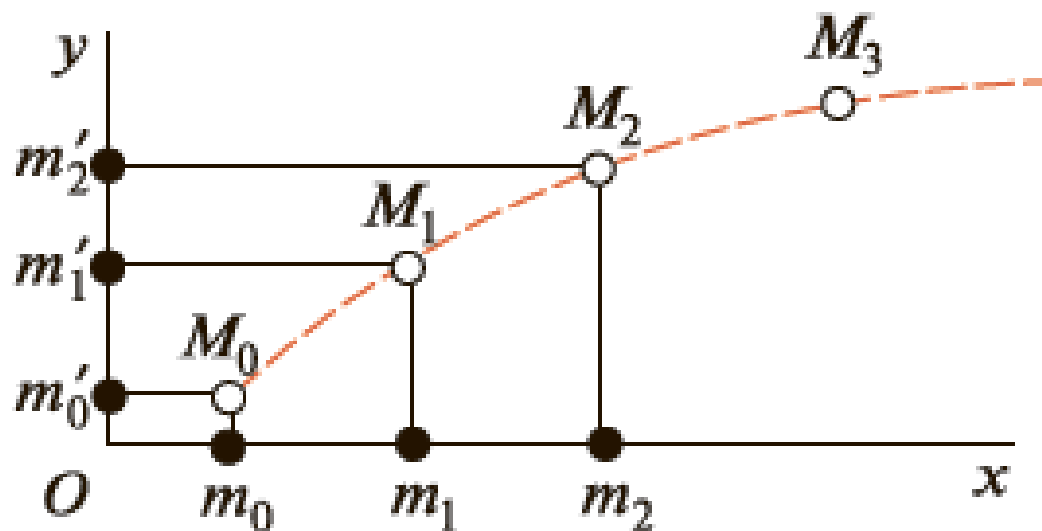
Зная траекторию точки и уравнение движения по этой траектории, можно определить положение точки в любой момент времени, для чего следует в равенство $s = f(t)$ подставить время.

Координатный способ заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат.

Уравнения плоского движения точки в координатной форме записываются следующим образом:

$$x = f(t); \quad y = f_1(t).$$

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а следовательно, и самой точки в любой момент времени.



Для того чтобы при координатном способе задания движения точки определить уравнение траектории $y = f(t)$, необходимо из уравнений движения исключить время.

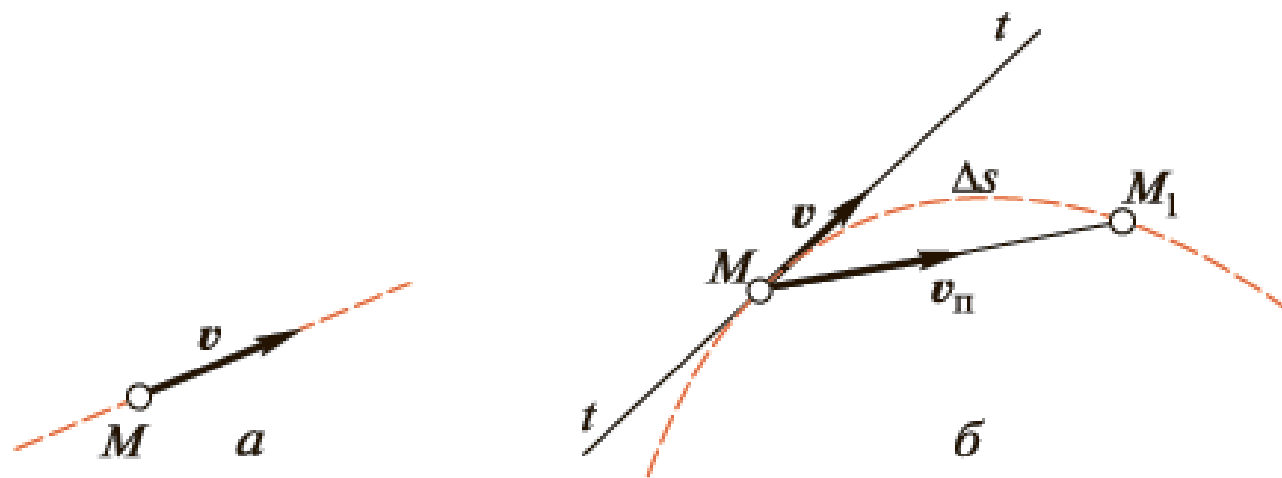
Скорость есть кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость измеряется длиной пути, пройденного за единицу времени:

$$v = \frac{s}{t} = \text{const}$$

(предполагается, что начала отсчета пути и времени совпадают).

Скорость есть величина векторная. При прямолинейном равномерном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а вектор ее совпадает с траекторией.



При криволинейном движении скорость точки по направлению меняется. Для того чтобы установить направление вектора скорости при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать вследствие их малости прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость v_{Π} такого прямолинейного движения будет направлена по хорде. В пределе при Δs , стремящемся к нулю, хорда совпадает с касательной, следовательно, *скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории в сторону движения.*

При неравномерном движении точки модуль ее скорости меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением

$$s = f(t).$$

Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs , то ее средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Средняя скорость не дает представления об **истинной скорости** в каждый **данный момент времени** (истинную скорость иначе называют **мгновенной**). Чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе она к истинной.

Истинная скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, числовое значение скорости равно

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Истинная скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т. е. расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Пример . Поезд движется согласно уравнению

$$s = 0,1t^2 + t,$$

где t — в секундах, s — в метрах.

Определить среднюю скорость поезда за промежуток времени между концом 10-й и 20-й секунд и истинную скорость в конце 20-й секунды.

Решение. Для определения средней скорости поезда найдем приращения времени и пути за указанный промежуток времени:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с};$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м}.$$

Средняя скорость поезда определится так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с}.$$

Для определения истинной скорости поезда продифференцируем уравнение движения по времени, в результате чего получим формулу, выражающую зависимость истинной скорости от времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(0,1t^2 + t) = 0,2t + 1.$$

Подставив в это выражение время t_2 , получим значение истинной скорости в конце 20-й секунды:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с}.$$

Ускорение есть кинематическая мера изменения вектора скорости точки.

Ускорение есть величина векторная. При прямолинейном движении точки вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости также совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv , то среднее ускорение

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Среднее ускорение не дает представления об истинном ускорении в каждый данный момент времени (истинное ускорение иначе называют мгновенным). Чем меньше промежуток времени, за который определяют среднее ускорение, тем ближе оно к истинному.

Истинное ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt , стремящемся к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, учитывая, что $v = \frac{ds}{dt}$, получаем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Пример. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^4 + 2t$, где s — в метрах, t — в секундах. Найти ее среднее ускорение в промежутке между моментами $t_1 = 5$ с, $t_2 = 7$ с, а также ее истинное ускорение в момент $t_3 = 6$ с.

Решение. Сначала определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2.$$

Подставляя в формулу вместо t его значения $t_1 = 5$ с и $t_2 = 7$, находим:

$$v_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с};$$

$$v_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Следовательно, приращение скорости за данный промежуток времени $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с будет равно

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Среднее ускорение точки

$$a_{\text{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы определить истинное ускорение точки, находим производную от скорости по времени:

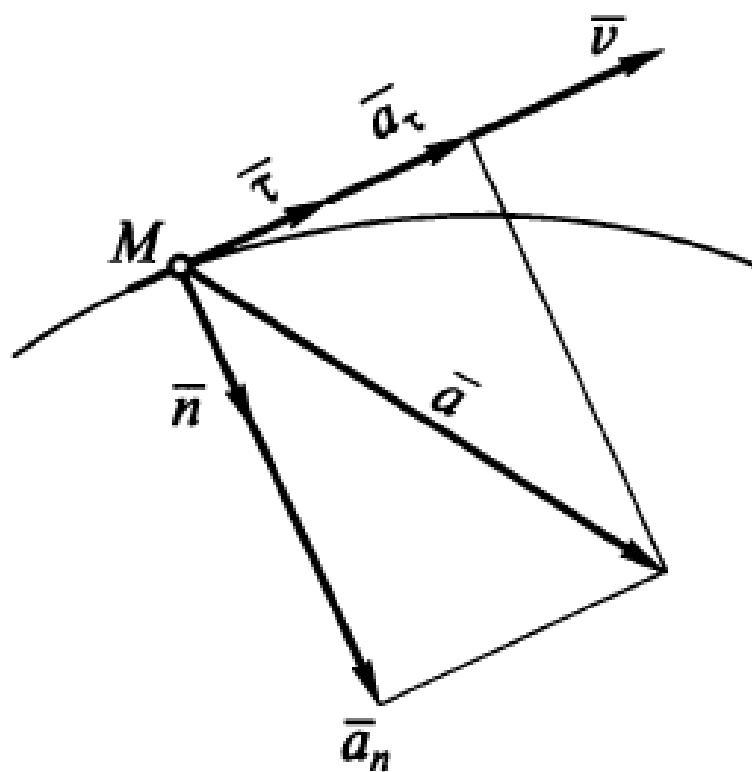
$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2.$$

Подставляя в формулу вместо t значение $t_3 = 6$, получаем

$$a_6 = 12 \cdot 6^2 = 432 \text{ м/с}^2.$$

При естественном способе задания траектории движения материальной точки ее вектор ускорения можно разложить по естественным осям координат $\bar{\tau}$ и \bar{n}

$$\bar{a} = a_{\tau} \bar{\tau} + a_n \bar{n}.$$



Проекция ускорения называется **касательным ускорением**, оно изменяет модуль скорости:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

Касательное ускорение существует только при неравномерном криволинейном движении.

Нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$ изменяет направление вектора скорости \vec{v} , поэтому материальная точка движется по криволинейной траектории (ρ — радиус кривизны траектории в точке).

Частные случаи движения материальной точки:

1) $a_n = 0$; $a_\tau = 0$. Следовательно, полное ускорение $a = 0$. Точка движется равномерно по прямой линии. Закон движения в этом случае $S = S_0 + v_0 t$, где S_0 — дуговая координата в начальный момент времени; v_0 — скорость движения точки в начальный момент движения (скорость не изменится и в любой другой момент времени t , так как движение не ускоренное);

2) $a_n \neq 0$; $a_\tau = 0$ — равномерное криволинейное движение. Вектор скорости материальной точки изменяется лишь по направлению. Закон движения по криволинейной траектории запишется аналогично первому случаю:

$$S = S_0 + v_0 t;$$

3) $a_n = 0$; $a_\tau \neq 0$ — прямолинейное неравномерное движение;

4) $a_n \neq 0$; $a_\tau \neq 0$ — криволинейное неравномерное движение.

Если в третьем случае $a_\tau = a = \text{const}$ и в четвертом $a_\tau = \text{const}$, то можно записать законы движения соответственно для равноускоренного (равнозамедленного) прямолинейного движения

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

и криволинейного равноускоренного (равнозамедленного) движения

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}.$$