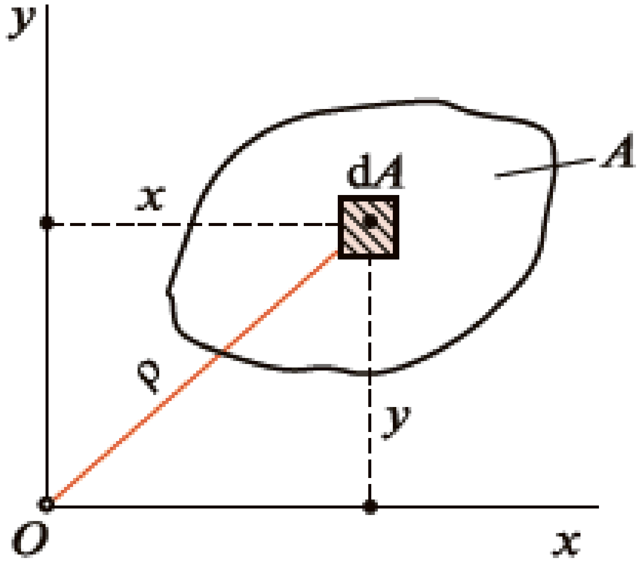
Геометрические характеристики плоских сечений

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. До сих пор мы изучали деформации, у которых напряжения зависели только от площади поперечного сечения. В дальнейшем для изучения деформаций кручения и изгиба нам потребуется знание некоторых других геометрических характеристик плоских фигур.

СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПЛОЩАДИ

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от них до этой оси (рис.).

Статический момент площади обозначим *S* с индексом соответствующей оси:



$$S_x = \int_A y\,\mathrm{d}A; \quad S_y = \int_A x\,\mathrm{d}A.$$

В теоретической механике были выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры:

$$x_C = \frac{\sum (A_i x_i)}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i}.$$

Так как в этих формулах под A_i можно понимать площадь $\mathrm{d}A$ элементарной площадки, то в пределе при $\mathrm{d}A$, стремящемся к нулю, выражения, стоящие в числителях правых частей формул, будут представлять собой статические моменты площади фигуры относительно осей y и x, а $\sum A_i$ есть площадь A всей фигуры. Следовательно,

$$S_y = \int_A x\,\mathrm{d}A = x_C A; \quad S_x = \int_A y\,\mathrm{d}A = y_C A.$$

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси. Размерность статического момента площади:

$$[S] = [x_C][A] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Статический момент площади фигуры может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

Очевидно, что статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади фигуры (центральной оси), в том числе относительно оси симметрии фигуры, *равен нулю*.

При определении статического момента площади сложной фигуры также можно применять метод разбиения, т. е. *определять статический момент* всей фигуры *как алгебраическую сумму* статических моментов отдельных ее частей:

$$S = \sum S_i,$$

где S_i — статический момент площади каждой части фигуры.

Понятие о статическом моменте площади понадобится нам в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

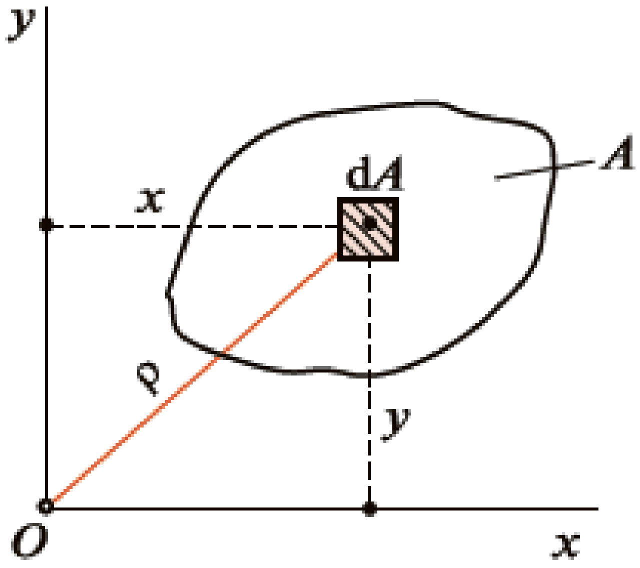
ПОЛЯРНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис.).
Полярный момент инерции обозначим:

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A.$$

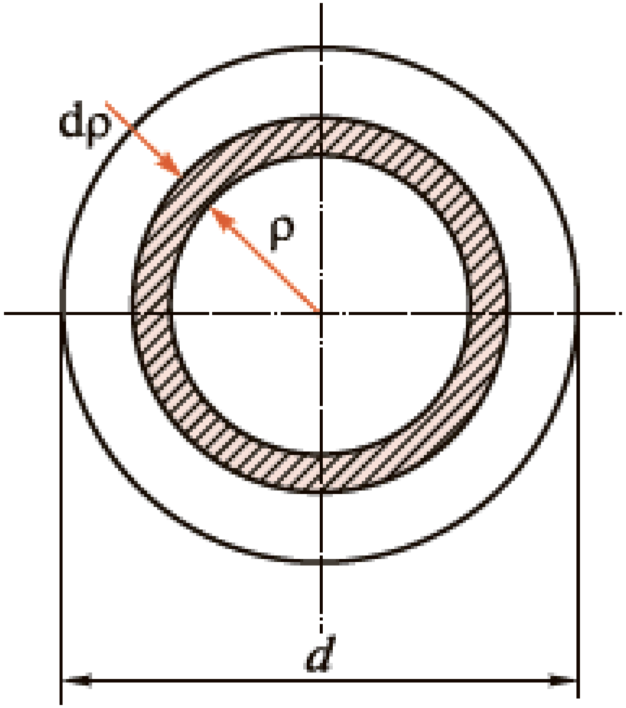
Размерность полярного момента инерции:

$$[I_p] = [\rho^2][A] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$



Полярный момент инерции – величина всегда положительная и не равная нулю.

Так как понятие полярного момента инерции понадобится нам при изучении деформаций кручения круглых валов, то приведем формулы для определения полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечений, принимая за полюс центры этих фигур.



Круг диаметром *d:*

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}1 d^4.$$

Кольцо размером *D* × *d*:

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0{,}1(D^4 - d^4).$$

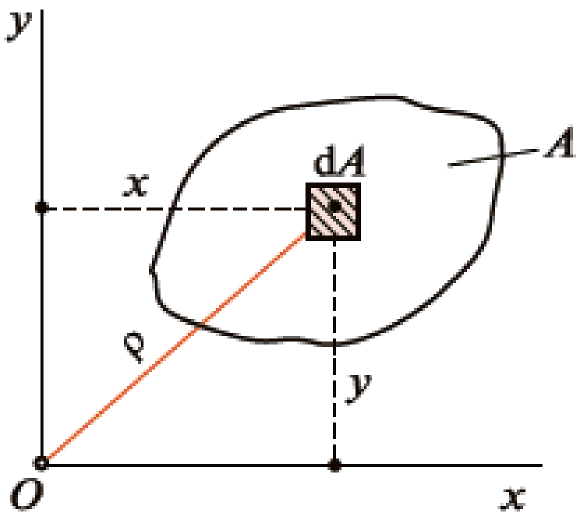
Полярный момент инерции кольцевого сечения можно вычислить как разность полярных моментов инерции большого и малого кругов.

ОСЕВОЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси (см. рис.).

Осевой момент инерции обозначим *I* с индексом, соответствующим оси.

Очевидно, что осевой и полярный моменты инерции имеют одинаковую размерность: $[I] = \text{м}^4$.



Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат:

$$I_x + I_y = I_p.$$

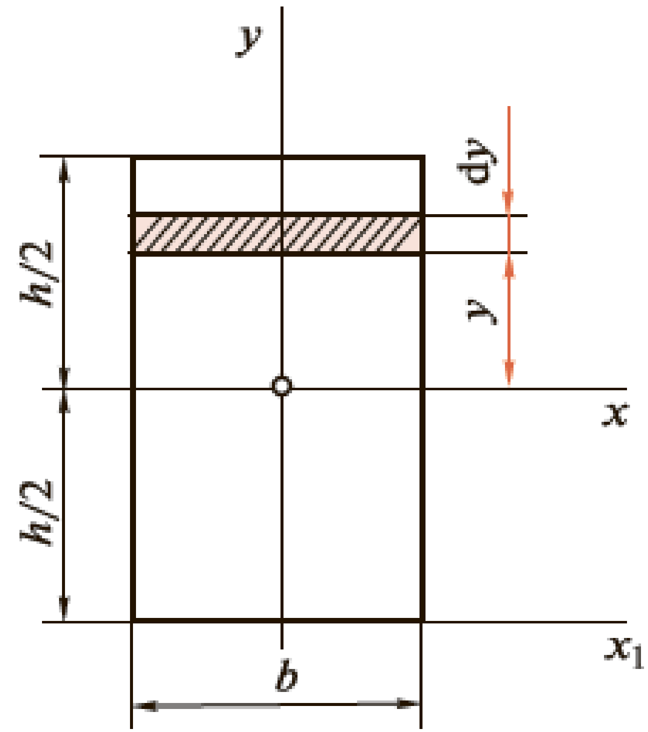
Понятие об осевых моментах инерции понадобится нам в дальнейшем при изучении теории изгиба.

Осевые моменты инерции некоторых простых фигур

Прямоугольник размером *b* × *h*

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Для квадрата со стороной a $I_x = a^4/12$.



Круг диаметром *d* относительно осей *x* и *y*.

В силу симметрии для круга $I_x = I_y$.

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0{,}05 d^4.$$

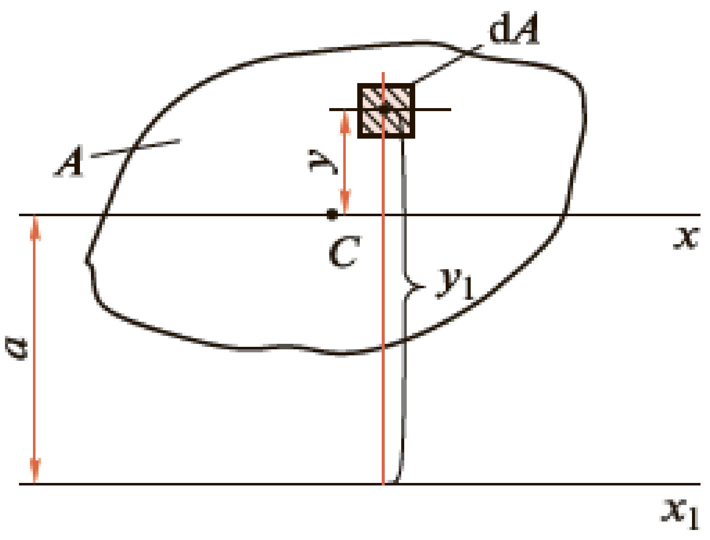
Кольцо размером $D \times d$ относительно осей *x* и *y*:

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \approx 0{,}05(D^4 - d^4).$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются *центральными*. Момент инерции относительно центральной оси называется *центральным моментом инерции*.

Теорема. *Момент инерции относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями*.

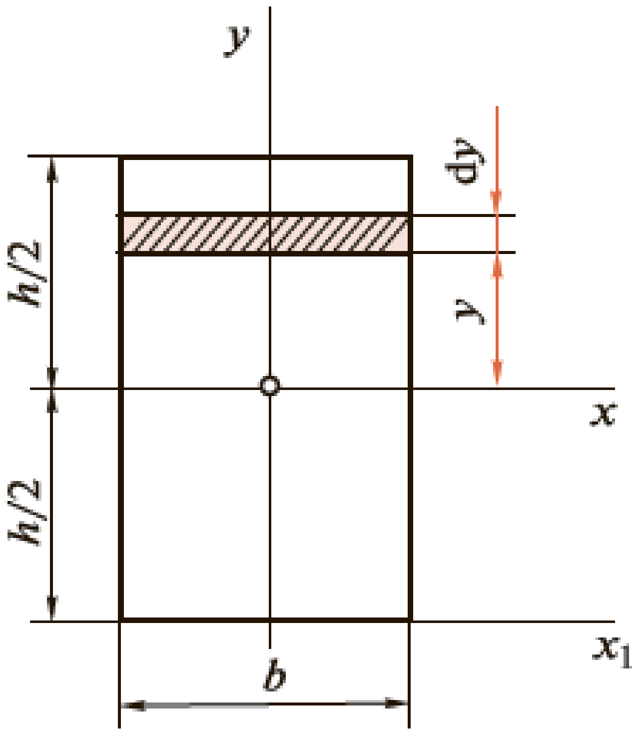


$$I_{x_1} = I_x + a^2 A$$

Формулой можно пользоваться только в тех случаях, когда одна из параллельных осей – центральная.

Анализируя полученную формулу, можно сделать вывод, что из множества параллельных осей *момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси*.

Выведем формулу для вычисления момента инерции прямоугольника относительно оси x_1, проходящей через основание (см. рис.):



$$I_{x_1} = I_x + a^2 A = \frac{bh^2}{12} + \frac{h^2 bh}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются *главными осями инерции*.

Момент инерции относительной главной оси называется *главным моментом инерции*.

Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то она называется *главной центральной осью*, а момент инерции относительно этой оси – *главным центральным моментом инерции*.

Особо важным является то обстоятельство, что если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных центральных осей.

ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется взятая по всей площади фигуры сумма произведений элементарных площадок на произведение расстояний этих площадок до двух данных взаимно-перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A,$$

где x, y — расстояния от площадки $\mathrm{d}A$ до осей y и x.

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю. Если взаимно-перпендикулярные оси *x* и *y* или одна из них являются осью симметрии плоской фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.

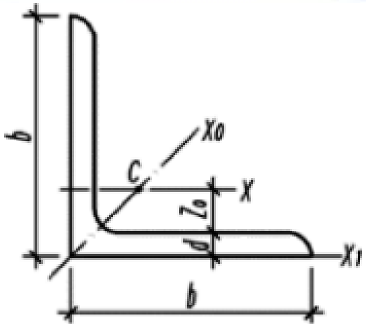
Центробежный момент инерции входит в формулы для определения положения главных осей несимметричных сечений.

РАДИУС ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

В таблицах стандартов на профили прокатных сталей содержится геометрическая характеристика, которая называется *радиусом инерции сечения*. Она используется при изучении внецентренного растяжения или сжатия, а также продольного изгиба и вычисляется по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}},$$

где I_x, I_y — осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей; A — площадь сечения.



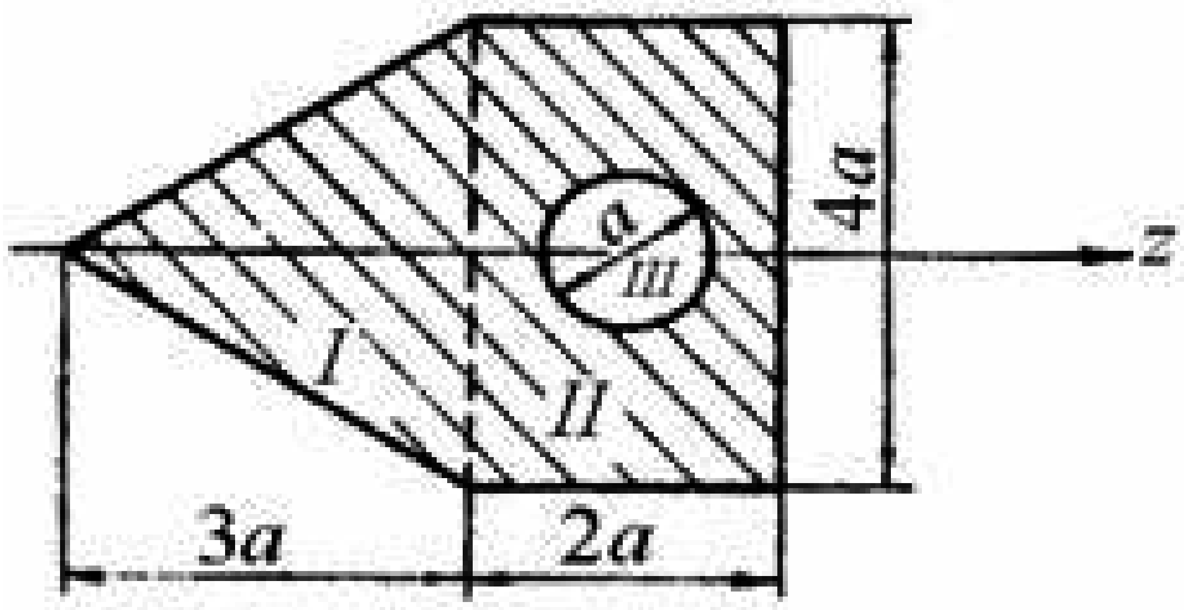
На рисунке и в таблице используются следующие обозначения: b — ширина полки; d — толщина полки; I — осевой момент инерции; i — радиус инерции; z_o — расстояние от центра тяжести до полки.

Номинальные размеры, площадь поперечного сечения, масса 1 м длины, справочные величины для осей

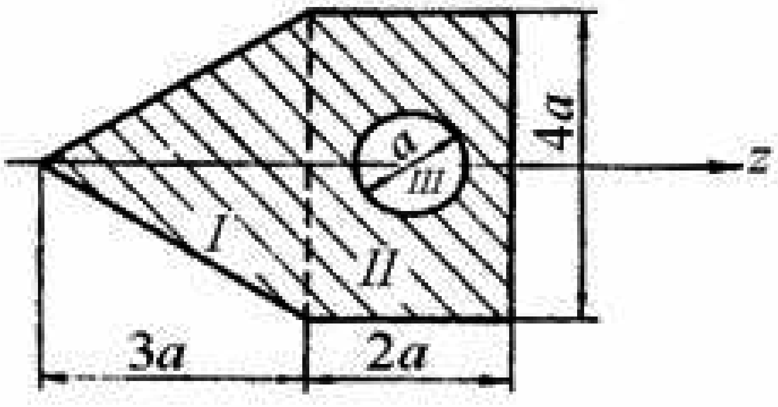
№ профиля	Масса 1 м	Размеры		Площадь сечения	Справочные величины для осей							
					x		x_0		y_0		x_1	$z_o + d$
		b	d		I_x	i_x	I_{x0max}	i_{x0max}	I_{y0min}	i_{y0min}	I_{x1}	
	кг	мм		см^2	см^4	см	см	см	см^4	см	см^4	см
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
	1,15	20	4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
	1,46	25	4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
	1,91	32	4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	1,65	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
	2,16	36	4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04

Задание 1

Определить момент инерции сечения, показанного на рисунке, относительно оси симметрии, *a*=10 см.



Решение



Разбиваем заданное сечение на простейшие элементы:
I - равнобедренный треугольник, II - прямоугольник, III - круг.

Момент инерции сложной фигуры относительно оси z определяется согласно формуле:

$$I_z = \sum_{i=1}^{3} (I_z)_i = I_z^{I} + I_z^{II} - I_z^{III}.$$

Решение

Определяем моменты инерции слагаемых простейших элементов.

Для равнобедренного треугольника:

$$I_z^I = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{48} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{48} = 4{,}00a^4;$$

Для прямоугольника согласно формуле:

$$I_z^{II} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 10{,}67a^4;$$

Для круга согласно формуле:

$$I_z^{III} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi a^4}{64} = 0{,}0491a^4.$$

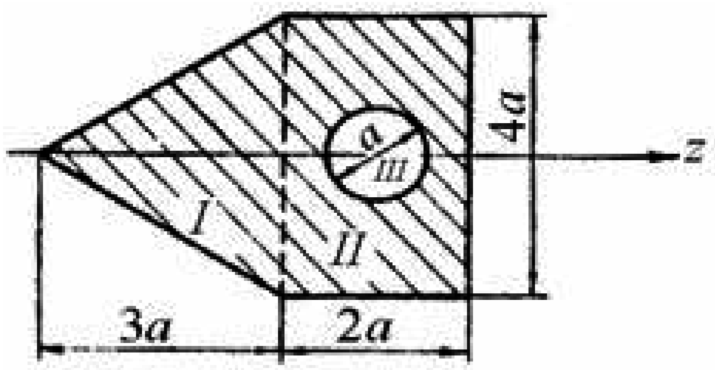
Решение

Окончательно получим:

$I_z = 4{,}0a^4 + 10{,}67a^4 - 0{,}0491a^4 = 14{,}6a^4 = 14{,}6\times10^4 = 1{,}46\times10^5$ см^4.

.

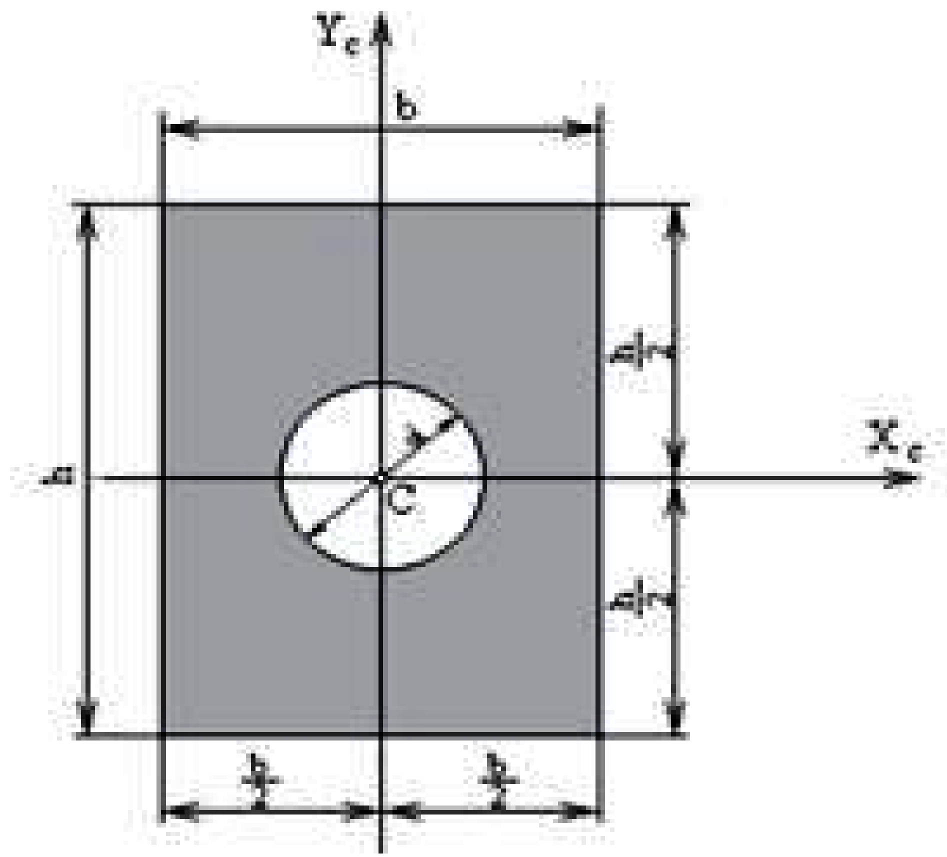
Определить момент инерции сечения, показанного на рисунке, относительно оси симметрии.



№ варианта	а, см	№ варианта	а, см
1	7	15	21
2	8	16	22
3	9	17	23
4	10	18	24
5	11	19	25
6	12	20	26
7	13	21	27
8	14	22	28
9	15	23	29
10	16	24	30
11	17	25	31
12	18	26	32
13	19	27	33
14	20	28	34

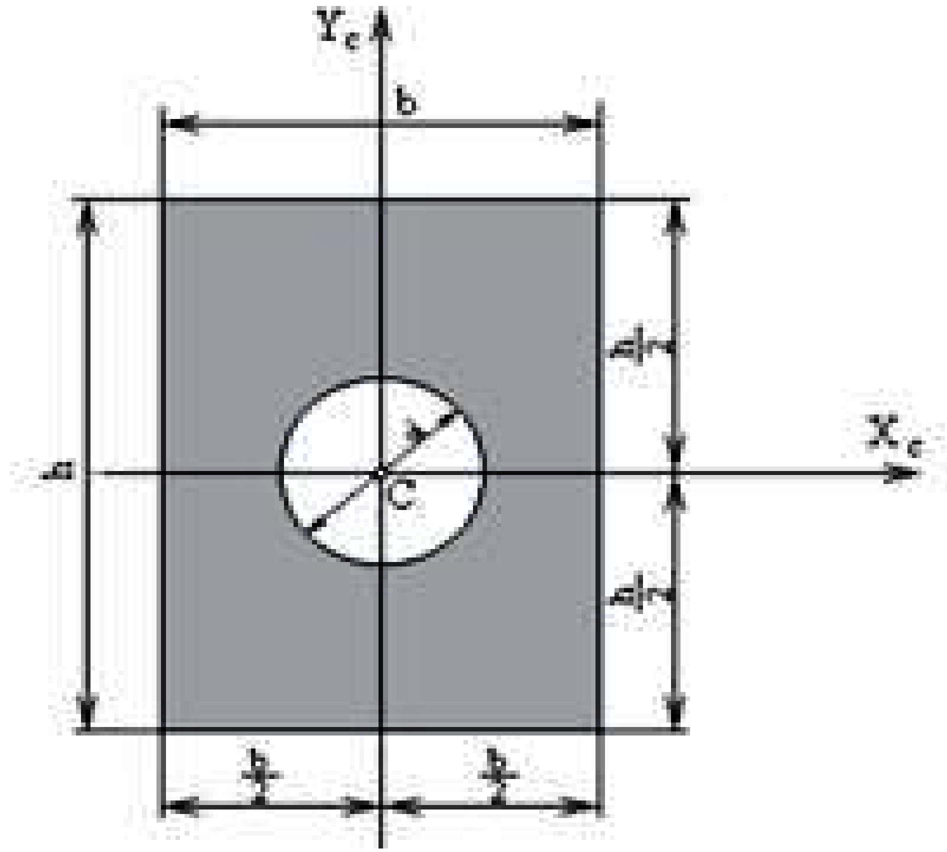
Задание 2

Определить положение главных центральных осей и вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения, представленного на рисунке, если b =0,1м, h=0,2м, d=0,05 м.



Решение

Сечение, изображенное на рисунке, представляет собой прямоугольник с отверстием в виде круга с отрицательной площадью. Так как сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит в точке пересечения этих осей. Эти же оси в данном случае будут являться главными центральными осями.



Решение

Определяем главные моменты инерции сечения. Предварительно по формулам, вычисляем моменты инерции элементарных фигур.

Для прямоугольника:

$$J_x^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2^3}{12} = 6{,}667 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^4,$$

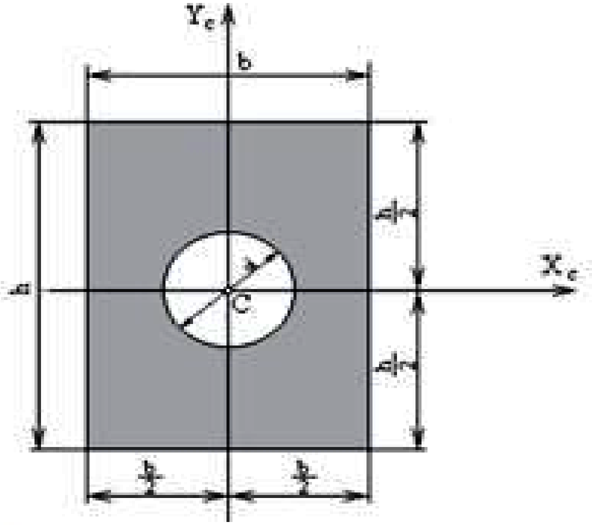
Для круга:

$$J_x^{(2)} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}05^4}{64} = 0{,}037 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^4.$$

Момент инерции всего сечения относительно оси X равен:

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = (6{,}667 - 0{,}037) \cdot 10^{-5} = 6{,}63 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^4.$$

Определить положение главных центральных осей и вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения, представленного на рисунке.



№ варианта	b, м	h, м	d, м	№ варианта	b, м	h, м	d, м
1	0,1	0,2	0,05	15	0,16	0,3	0,09
2	0,11	0,21	0,06	16	0,17	0,31	0,08
3	0,12	0,22	0,07	17	0,18	0,32	0,07
4	0,13	0,23	0,08	18	0,2	0,33	0,06
5	0,14	0,24	0,09	19	0,21	0,34	0,05
6	0,15	0,25	0,1	20	0,22	0,35	0,04
7	0,16	0,26	0,09	21	0,23	0,36	0,045
8	0,17	0,3	0,08	22	0,24	0,2	0,039
9	0,18	0,31	0,07	23	0,1	0,21	0,05
10	0,2	0,32	0,06	24	0,11	0,22	0,06
11	0,21	0,33	0,05	25	0,12	0,23	0,07
12	0,22	0,34	0,04	26	0,13	0,24	0,08
13	0,23	0,35	0,045	27	0,14	0,25	0,09
14	0,24	0,36	0,039	28	0,15	0,26	0,1