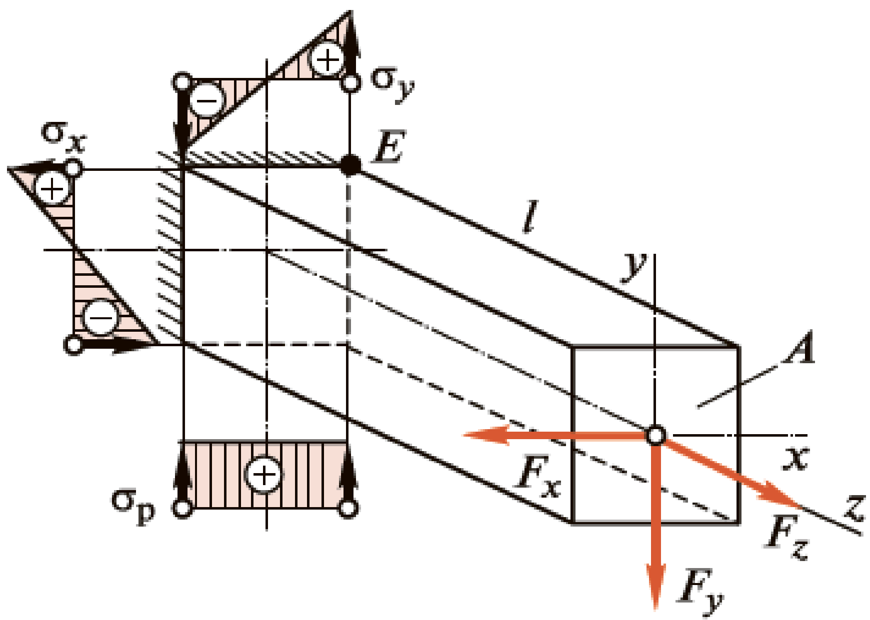
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

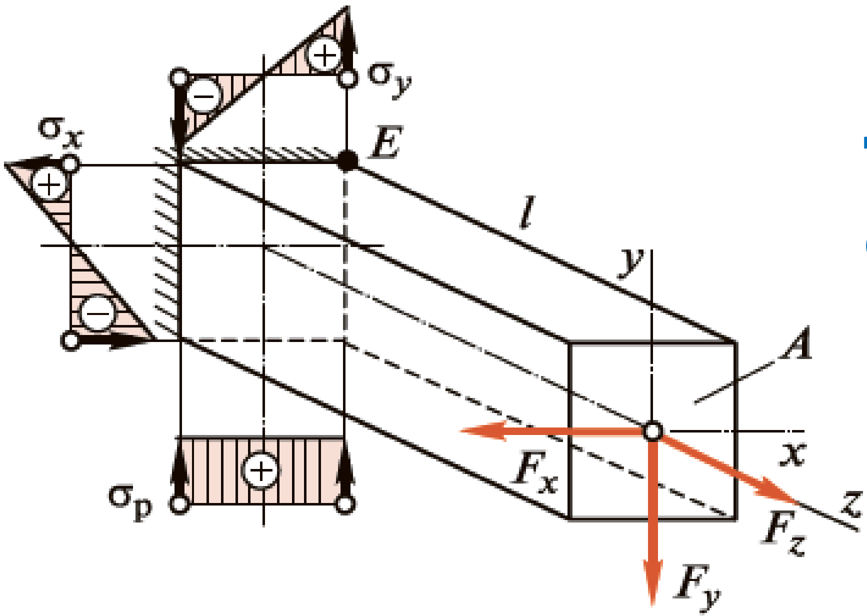
Сочетание основных деформаций

Изгиб и растяжение (сжатие)

Рассмотрим брус длиной l постоянного поперечного сечения площадью A, защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце произвольно направленной силой F, приложенной в центре тяжести сечения.



Разложим силу F на составляющие F_x, F_y и F_z. В результате действия этих составляющих получаем сочетание деформаций растяжения и поперечного изгиба в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, причем касательными напряжениями изгиба будем в дальнейшем пренебрегать.

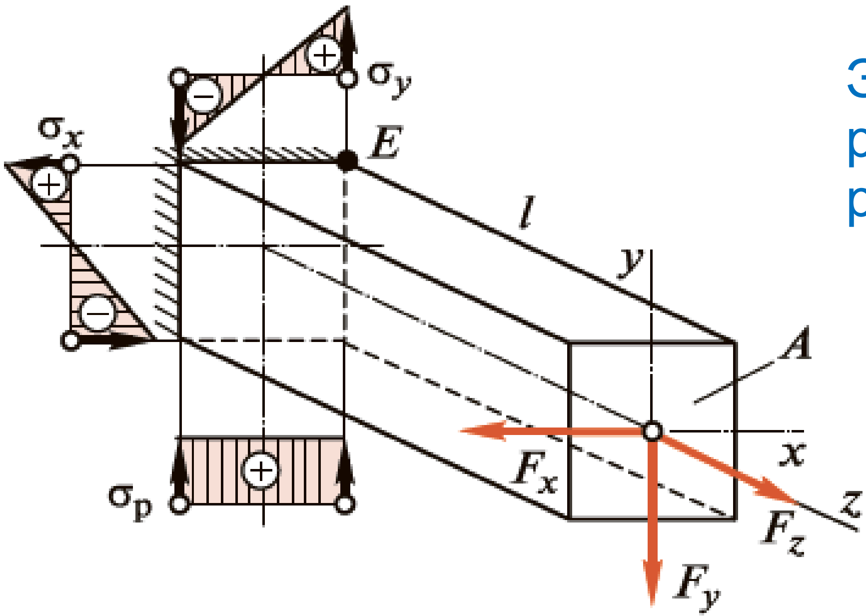


Применим принцип независимости действия сил и определим максимальные нормальные напряжения в опасном сечении (заделке):

$$\sigma_p = \frac{F_z}{A}; \quad \sigma_x = \pm\frac{F_y l}{W_x}; \quad \sigma_y = \pm\frac{F_x l}{W_y}.$$

Максимальные суммарные напряжения возникнут в точке *E* и будут напряжениями растяжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_E = \frac{F_z}{A} + \frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y}.$$

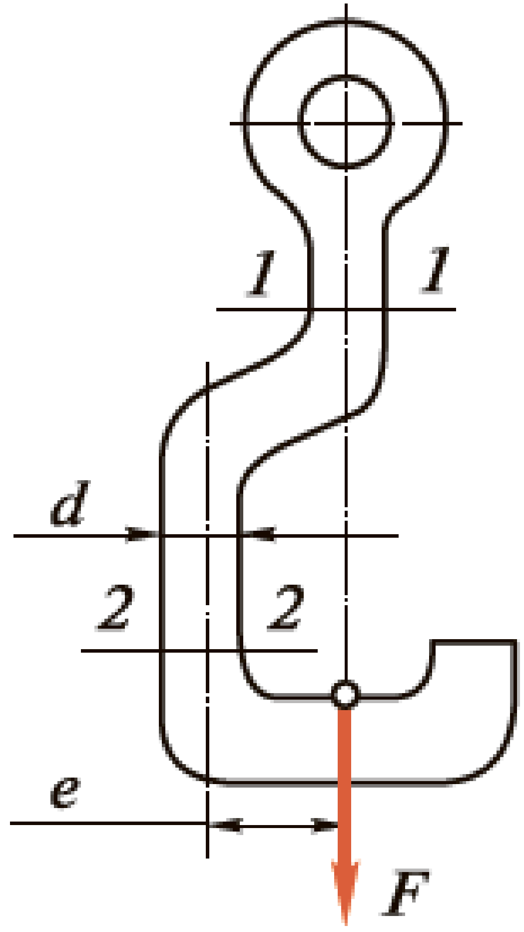


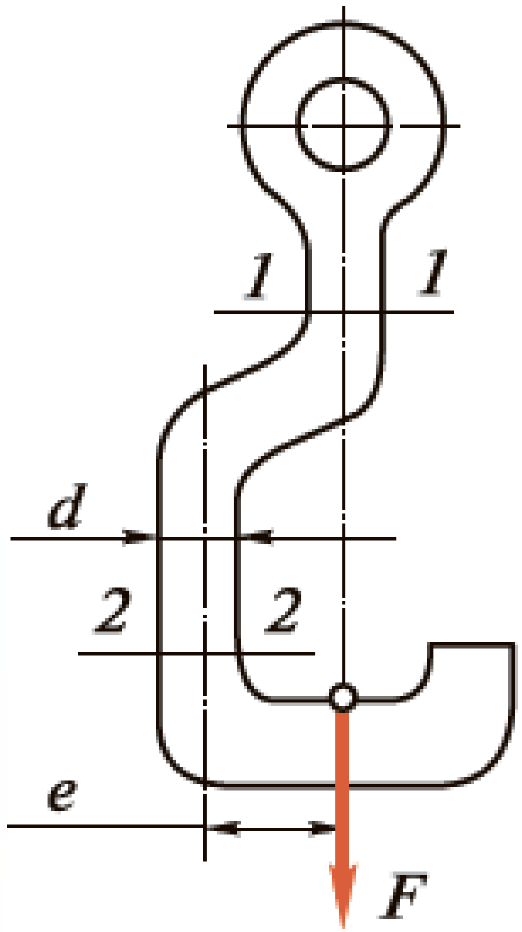
Эпюры нормальных напряжений растяжения и изгиба представлены на рисунке.

Деформации растяжения и изгиба сочетаются, например, у крюков, винтов с отогнутой головкой, винтов слесарных тисков и т. д.

Пример

На рисунке изображен стальной крюк, изготовленный из круглого прутка диаметром d = 24 мм. Эксцентриситет крюка e=55 мм, сила тяжести поднимаемого груза F=3кН. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях *1 - 1* и *2 - 2* крюка.



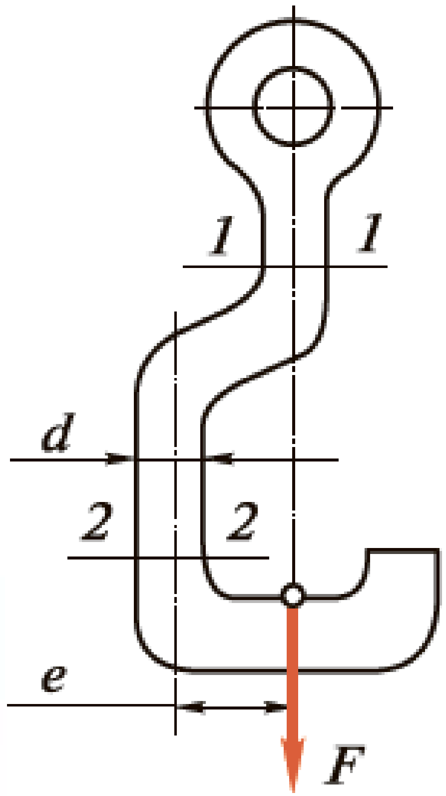


Р е ш е н и е.

Применив метод сечений, видим, что в сечении *1-1* действует один силовой фактор — продольная сила $N = F$, а в сечении *2-2* — два внутренних силовых фактора: продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_и = Fe$.

Вычислим напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях *1-1* и *2-2*:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}} = 6{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$



В сечении *2-2* имеем сочетание изгиба и растяжения.

Вычислим максимальное суммарное напряжение:

$$\sigma_2 = \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{и}}{W_{и}} = \sigma_1 + \frac{Fe}{W_{и}}.$$

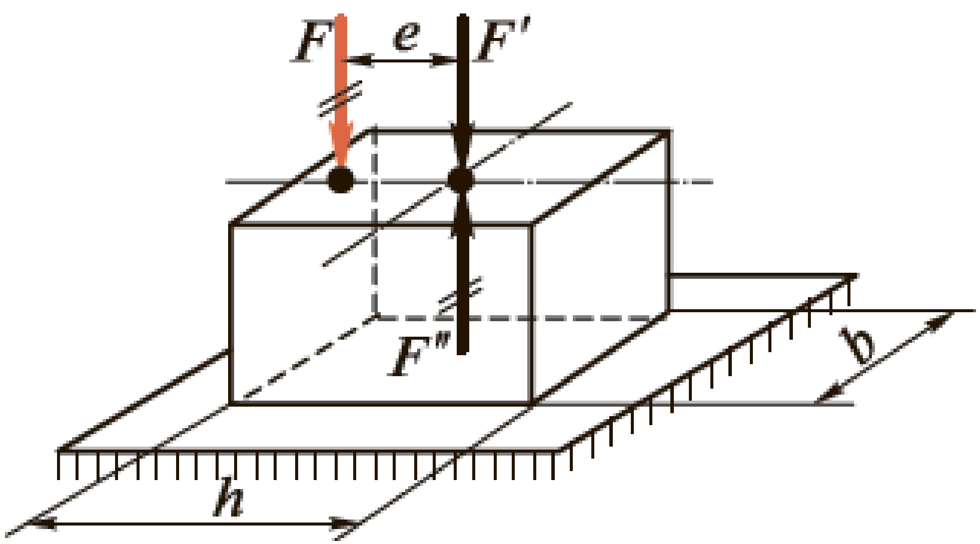
Учитывая, что $e = 55$ мм, а $W_{и} \approx 0{,}1d^3$, получим

$$\sigma_2 = 6{,}7 \cdot 10^6 + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3}}{0{,}1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}} = 126 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Внецентренное сжатие

Вид деформации, когда сжимающая сила параллельна оси бруса, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести сечения называется *внецентренным сжатием* (ранее изученную нами деформацию можно назвать центральным сжатием).

Рассмотрим брус прямоугольного сечения площадью $A = bh$ (см. рис.), к которому на расстоянии e от оси приложена параллельная ей сила F.

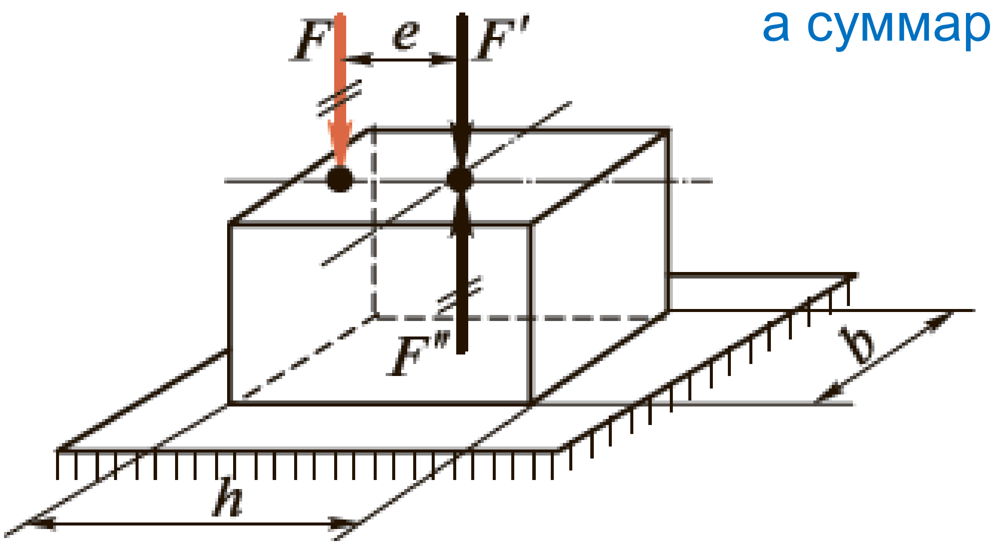


В центре тяжести сечения вдоль оси приложим две противоположно направленные силы, равные по модулю силе *F*. Полученную систему трех сил будем рассматривать как силу *F*, приложенную в центре тяжести, и пару сил с моментом $m = Fe$.

Пользуясь принципом независимости действия сил, внецентренное сжатие будем

рассматривать как *сочетание центрального сжатия и чистого изгиба*, причем соответствующие нормальные напряжения будем определять по формулам:

$$\sigma_с = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_и = \pm\frac{M_и}{W_и},$$



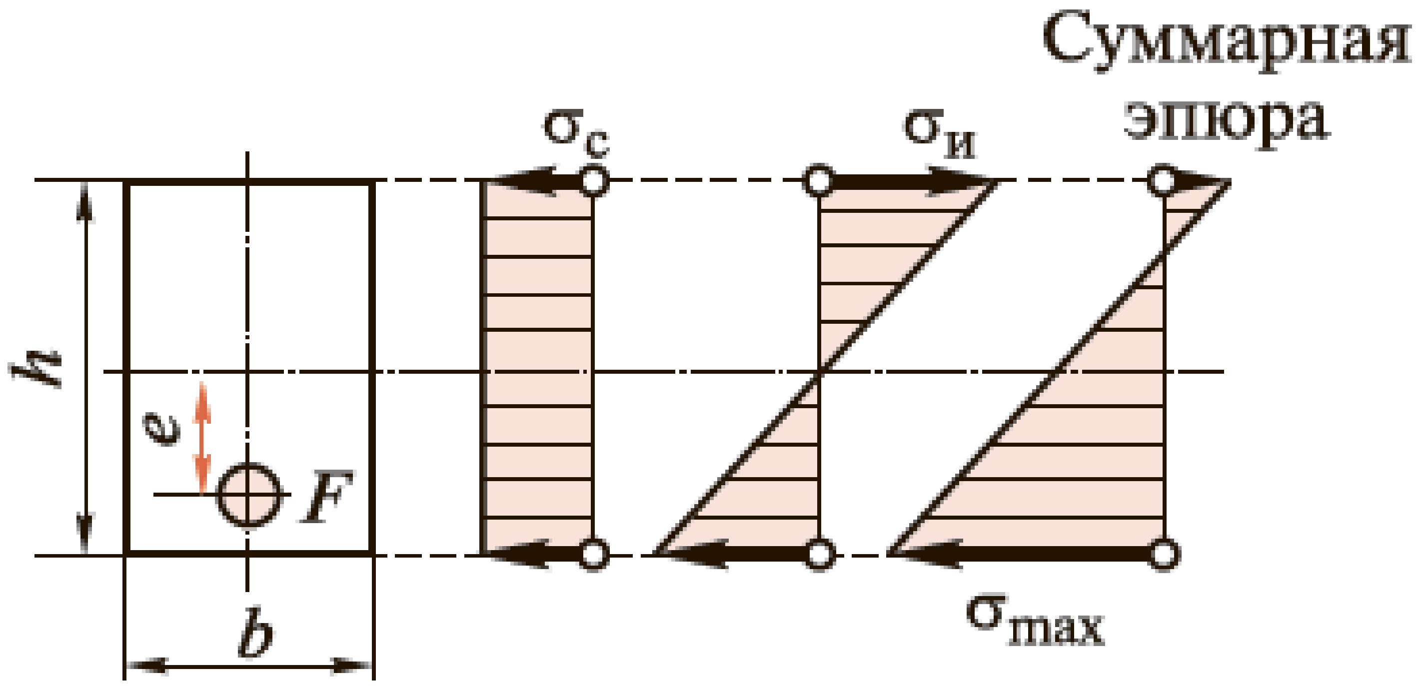
а суммарные напряжения — по формуле:

$$\sigma = \sigma_с + \sigma_и = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_и}{W_и}.$$

Максимальные суммарные напряжения будут напряжениями сжатия:

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_{и}}.$$

Эпюры нормальных напряжений сжатия, изгиба и суммарная эпюра представлены на рисунке.



Чтобы в брусе не возникали напряжения растяжения (недопустимые, например, в кирпичной или каменной кладке), должно выполняться неравенство:

$$\sigma_{\text{с}} \geq \sigma_{\text{и}} \text{ или } \frac{F}{A} \geq \frac{Fe}{W_{\text{и}}}, \text{ откуда } e \leq \frac{W_{\text{и}}}{A}.$$

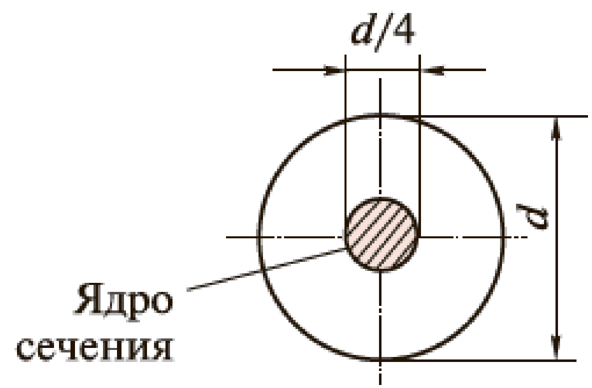
Для бруса прямоугольного сечения предельное значение эксцентриситета:

$$e = \frac{W_{\text{и}}}{A} = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6}.$$

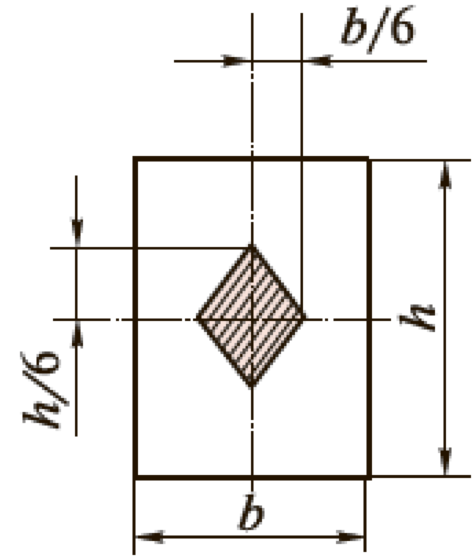
Для бруса круглого сечения диаметром *d* предельное значение эксцентриситета будет равно:

$$e = \frac{W_{\text{и}}}{A} = \frac{\pi d^3/32}{\pi d^2/4} = \frac{d}{8}.$$

Ввиду полярной симметрии круга геометрическое место предельных положений точек приложения сжимающей силы F будет представлять собой окружность диаметром $d/4$. Круг, расположенный внутри этой окружности, называется *ядром сечения* (см. рис.).



Для прямоугольного бруса сечением $b \times h$ ядро сечения представляет собой ромб с диагоналями $h/3$ и $b/3$ (см. рис.). В случае *внецентренного растяжения* расчеты производятся по таким же формулам с учетом знаков напряжений.



Гипотезы прочности

Часто встречаются и имеют большое практическое значение случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях возникают и нормальные, и касательные напряжения, распределенные неравномерно и по разным законам.

Для таких случаев опытное определение величин, характеризующих прочность, невозможно, поэтому при оценке прочности детали приходится основываться

на механических характеристиках данного материала, полученных из диаграммы растяжения.

Как известно, при растяжении прочность пластичных материалов характеризуется *пределом текучести*, а хрупких — *пределом прочности*; эти напряжения считаются предельными, в зависимости от них вычисляют допускаемые напряжения.

Гипотезы прочности — это научные предположения об основной причине достижения материалом предельного напряженного состояния при сочетании основных деформаций.

Эквивалентным напряжением называется такое условное напряжение при одноосном растяжении, которое равноопасно заданному случаю сочетания основных деформаций.

На основании гипотез прочности выводят формулы для вычисления эквивалентного напряжения, которое затем сопоставляют с допускаемым напряжением на растяжение.

Условие прочности при сочетании основных деформаций, когда в поперечных сечениях действуют и нормальные, и касательные напряжения:

$$\sigma_{экв} \le [\sigma_{р}].$$

Первая теория прочности, основанная на гипотезе наибольших нормальных напряжений, и *вторая теория прочности*, основанная на гипотезе наибольших линейных деформаций, в настоящее время не применяются, и мы их рассматривать не будем.

Перейдем к рассмотрению теорий прочности, которыми пользуются в настоящее время.

Гипотеза наибольших касательных напряжений (*третья теория прочности*).

Согласно этой гипотезе, предложенной в конце XVIII в., *опасное состояние материала наступает тогда*, *когда наибольшие касательные напряжения достигают предельной величины*.

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений хорошо подтверждается опытами, в особенности для пластичных материалов.

Гипотеза Мора (*четвертая теория прочности*).

К. О. Мор (1835 -1918) — немецкий ученый в области сопротивления материалов и строительной механики, создатель одной из теорий прочности, графических методов определения напряжений при сложном напряженном состоянии (круг Мора) и т. д.

Гипотеза Мора предложена в начале XX в. Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала наступает тогда*, *когда на некоторой площадке осуществляется наиболее неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений*.

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

где $k = [\sigma_р]/[\sigma_с]$.

Эта формула одинаково пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов, при k = 1 она тождественна формуле третьей теории прочности.

Энергетическая гипотеза (*пятая*, или *энергетическая теория прочности*).

При деформации элементарной частицы тела в общем случае изменяются ее форма и ее объем. Таким образом, полная потенциальная энергия деформации состоит из двух частей: энергии формоизменения и энергии изменения объема. Энергетическая гипотеза прочности, предложенная в начале XX в., в качестве критерия перехода материала в предельное состояние принимает только энергию формоизменения.

Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала в данной точке наступает тогда*, *когда удельная потенциальная энергия формоизменения для этой точки достигает предельной величины*.

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Эта формула для пластичных материалов хорошо подтверждается опытами и получила широкое распространение.

Изгиб и кручение

Сочетание деформаций изгиба и кручения испытывает большинство валов, которые обычно представляют собой прямые брусья круглого или кольцевого сечения.

При расчете валов мы будем учитывать только крутящий или изгибающий моменты, действующие в опасном поперечном сечении, и не будем принимать во внимание поперечные силы, так как соответствующие им касательные напряжения относительно невелики.

Максимальные нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях круглых валов вычисляют по формулам:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}, \quad \tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}},$$

причем для круглых валов $W_{\text{р}} = 2W_{\text{и}}$.

При сочетании изгиба и кручения опасными будут точки опасного поперечного сечения вала, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Применив третью теорию прочности, получим:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{W_р}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{2W_и}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_и^2 + M_к^2}}{W_и}.$$

Выражение, стоящее в числителе, назовем *эквивалентным моментом*:

$$M_{экв} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2};$$

Тогда расчетная формула для круглых валов примет вид:

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}}{W_и} \le [\sigma]$$

Валы обычно изготовляют из материала, у которого $[\sigma_р] = [\sigma_с] = [\sigma]$.

Применив энергетическую теорию прочности, получим:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 3\left(\frac{M_к}{2W_и}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_и^2 + 0{,}75 M_к^2}}{W_и},$$

т. е. по энергетической теории прочности:

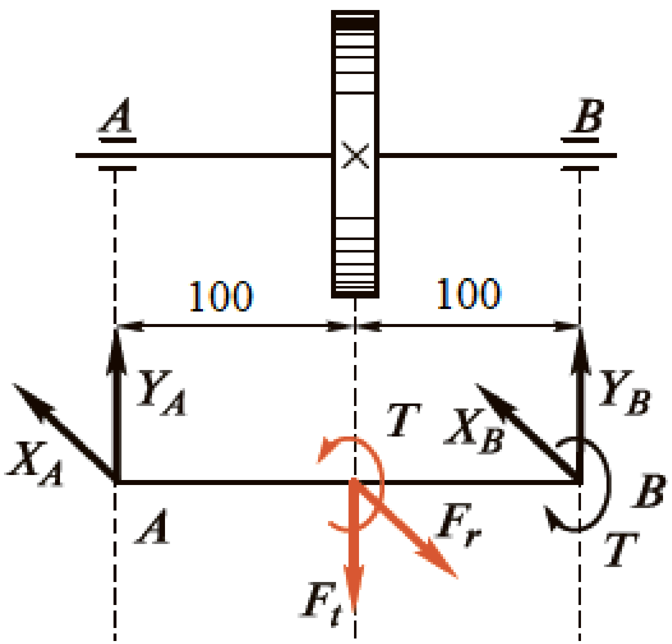
$$M_{экв} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75 M_к^2}.$$

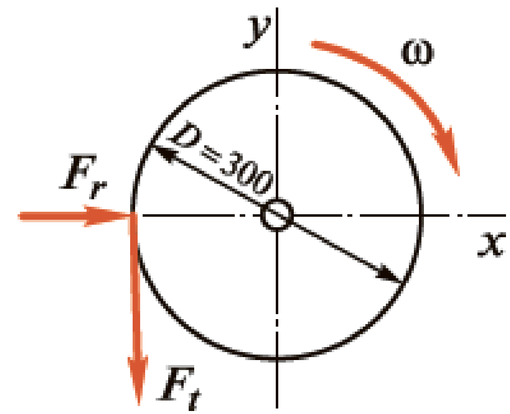
Для расчетов деталей на сочетание деформаций поперечного изгиба и кручения необходимо, как правило, составить расчетную схему конструкции и построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, определить предположительно опасные сечения, после чего, применив одну из теорий прочности, произвести необходимые расчеты.

Пример

На рисунке в прямоугольных проекциях представлены ведущий вал цилиндрической прямозубой передачи и расчетная схема вала.

Передаваемая мощность P = 40 кВт; частота вращения вала n = 1 000 об/мин; диаметр делительной окружности зубчатого колеса D = 300 мм; расстояние между опорами вала l = 200 мм; радиальная нагрузка на зуб колеса $F_r = 0{,}36F_t$, где F_t — окружная сила на колесе; диаметр вала в опасном сечении d = 35 мм; допускаемое напряжение для вала $[\sigma_p]$ = 70 МПа. Выполнить проверку прочности вала.





Расчетная схема

Решение

Определим вращающий момент *T*:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 40 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 1\,000} = 380 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

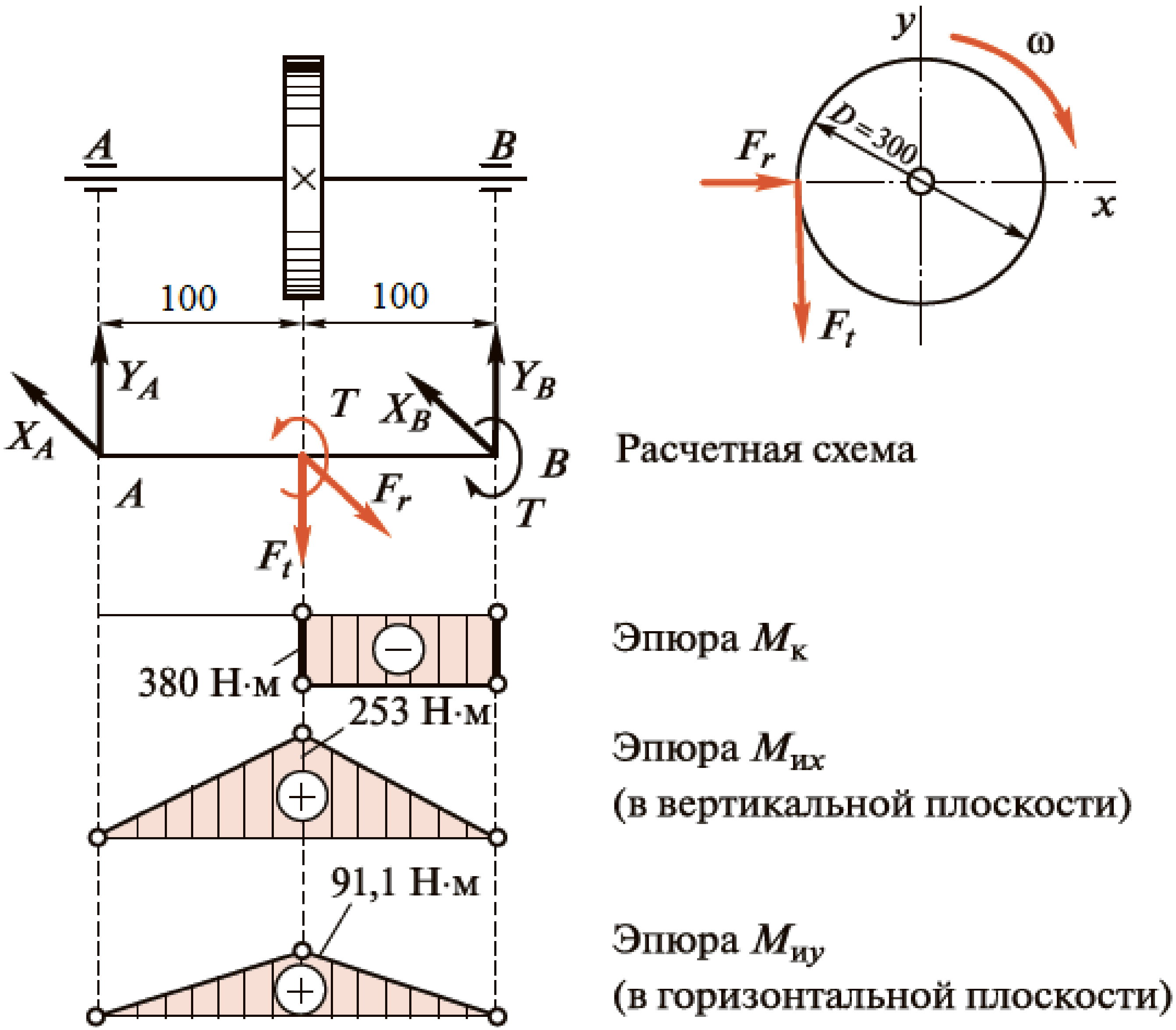
Определим окружную силу F_t:

$$F_t = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 380}{0{,}3} = 2\,530 \text{ Н}.$$

Определим радиальную силу F_r:

$$F_r = 0{,}36 F_t = 0{,}36 \cdot 2\,530 = 911 \text{ Н}$$

По этим данным строим эпюры $M_к$ и $M_и$.



Из эпюр видно, что опасное сечение расположено в месте закрепления зубчатого колеса.

Применим третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{и}}};$$

учитывая, что $M_{\text{и}}^2 = M_{\text{и}x}^2 + M_{\text{и}y}^2$, $W_{\text{и}} \approx 0{,}1d^3$.

Взяв значения моментов из эпюр на рисунке, получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{253^3 + 91{,}1^2 + 380^2}}{0{,}1(35 \cdot 10^{-3})^3} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 109 \text{ МПа} > [\sigma_{\text{р}}] = 70 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность вала недостаточна.