Устойчивость сжатых стержней

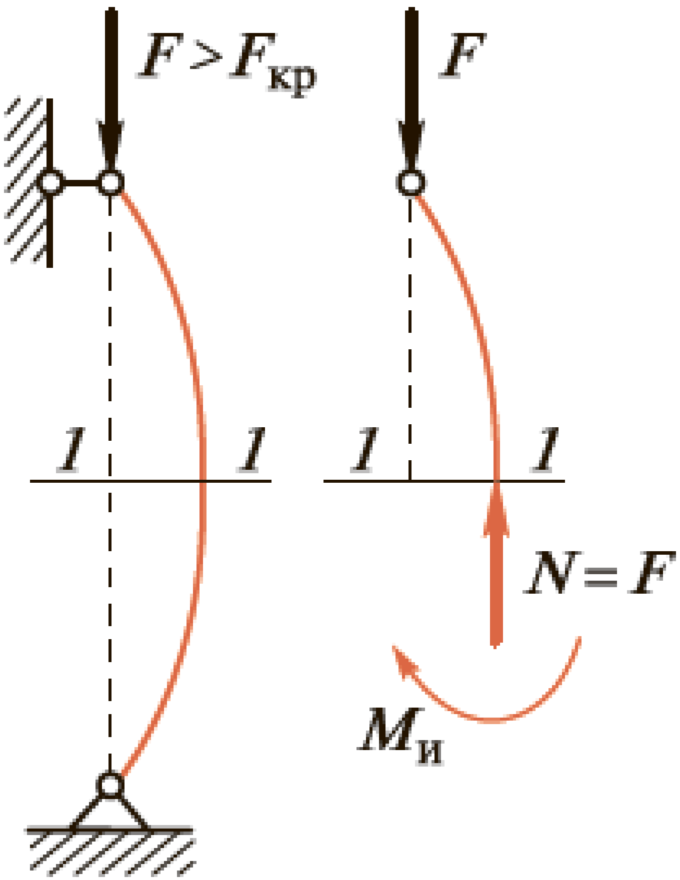
Продольным изгибом называется изгиб первоначально прямолинейного стержня вследствие потери устойчивости под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил. Продольный изгиб возникает при достижении сжимающими силами и напряжениями критического значения.

Расчеты на прочность, рассмотренные в предыдущих темах, делались в предположении, что при деформации конструкции между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами существует устойчивая форма равновесия, при которой малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения конструкции от первоначальной формы.

Нагрузки, при превышении которых происходит потеря устойчивости (критическое состояние), называют *критическими*.

Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных конструкций, стержней, пластинок и оболочек.

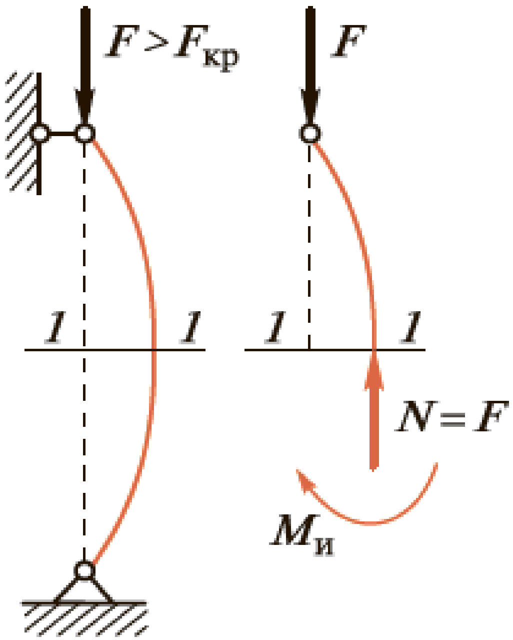
Рассмотрим тонкий стальной стержень, длина которого значительно больше поперечных размеров, сжимаемый силой *F*, немного большей критической силы $F_{кр}$ (см. рис.).



Применяя метод сечений, убеждаемся, что в результате искривления оси в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних силовых фактора - продольная сила *N=F* и изгибающий момент $M_и$.

Таким образом, искривленный стержень испытывает *сочетание деформаций* центрального сжатия и изгиба.

При сжимающих силах, даже немного превышающих критическую силу, напряжения изгиба могут непосредственно угрожать прочности конструкции. Поэтому критическое состояние конструкции считается недопустимым.



Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы действующая на стержень сжимающая сила F была меньше критической $F_{кр}$.

Обозначим допускаемую сжимающую силу $[F]$, тогда:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[s_{у}]},$$

где $[s_{у}]$ — допускаемый *коэффициент запаса устойчивости*.

Очевидно, что устойчивость стержня обеспечена, если $[s_{у}] > 1$.

Значение коэффициента запаса устойчивости зависит от назначения стержня и его материала. Обычно для сталей $[s_{у}]$ = 1,8 … 3; для чугунов $[s_{у}]$ = 5 … 5,5; для дерева $[s_{у}]$ = 2,8 … 3,2.

Формулы Эйлера и Ясинского

Для расчетов стержней на устойчивость необходимо знать способы определения критической силы $F_{кр}$.

Первые исследования устойчивости сжатых стержней были проведены академиком Петербургской Академии наук Леонардом Эйлером(1707 – 1783).

В дальнейшем большая работа в области теоретического и экспериментального исследования вопросов устойчивости была проведена русским ученым, профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. С. Ясинским (1856 –1899), опубликовавшим в 1893 г. большую работу «Опыт развития продольного изгиба».

Л. Эйлером была получена формула для определения величины критической силы $F_{кр}$.

Формула Эйлера:

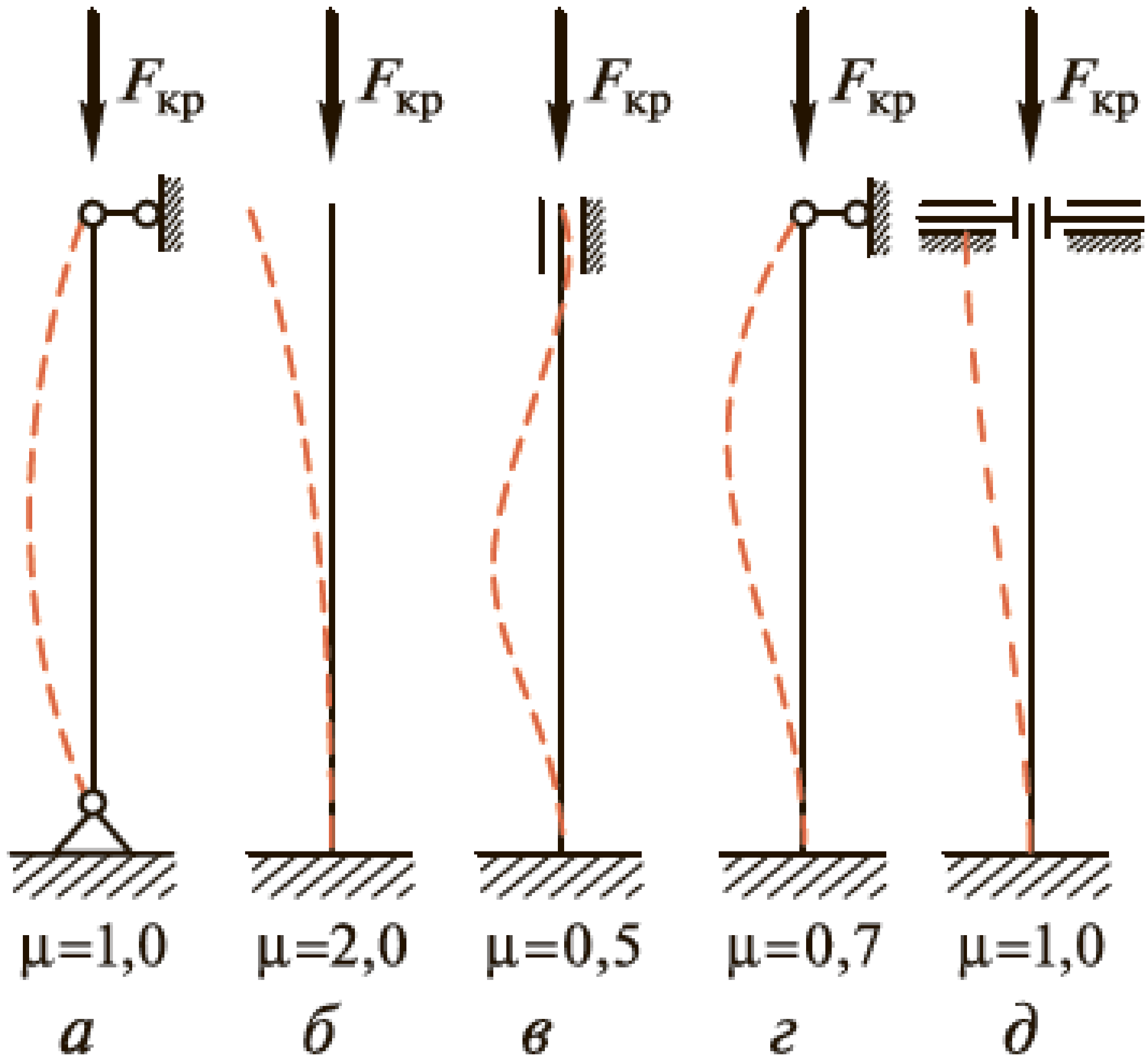
$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_{\text{п}}^2}.$$

Здесь E — модуль упругости первого рода; $I_{\min}$ — наименьший из осевых моментов инерции сечения, поскольку искривление стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, в чем нетрудно убедиться, сжимая продольной силой слесарную линейку; $l_{\text{п}}$ — *приведенная длина стержня*;

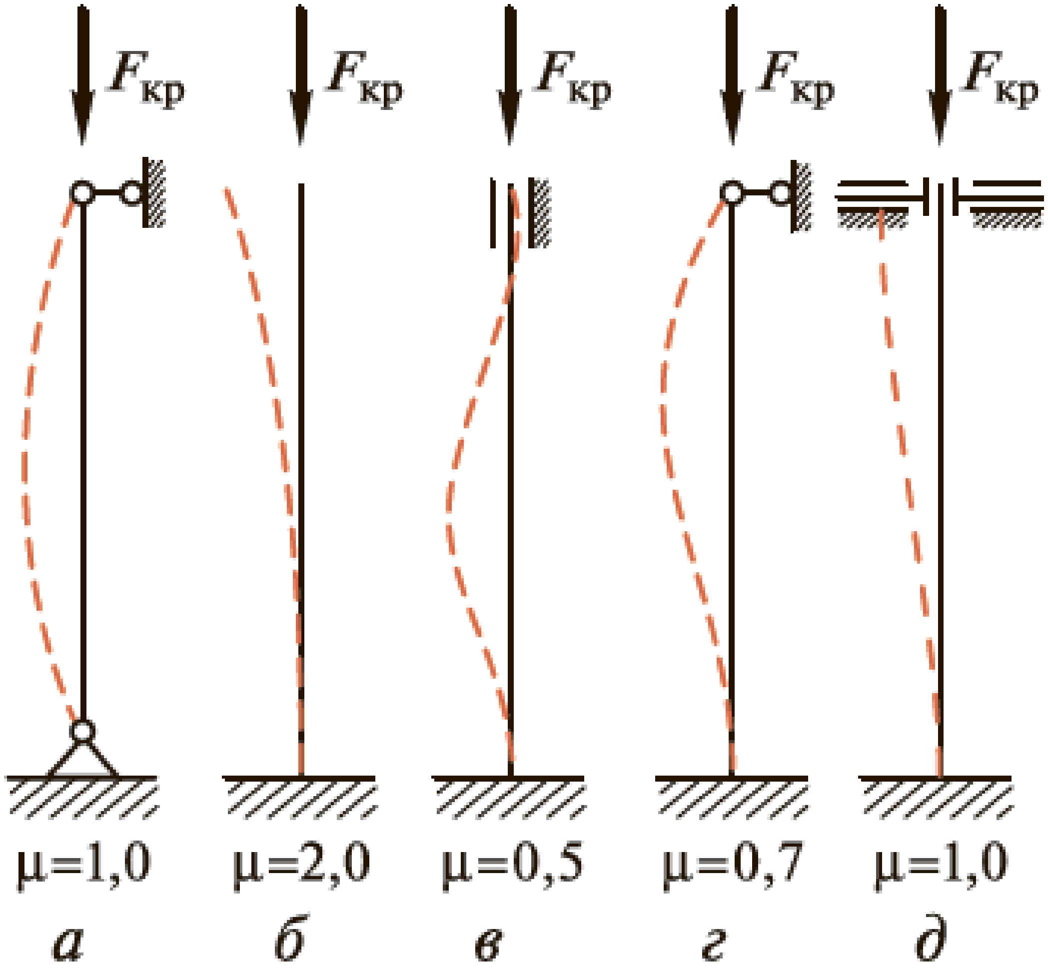
$$l_{\text{п}} = \mu l,$$

где l — длина стержня; μ — *коэффициент приведения длины*, зависящий от способа закрепления концов стержня.

На рисунке показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и приведены значения μ.



Оба конца стержня закреплены шарнирно и могут сближаться (рис. *а*); нижний конец жестко защемлен, верхний свободен (рис. *б*); оба конца жестко защемлены, но могут сближаться (рис. *в*); нижний конец закреплен жестко, верхний — шарнирно, концы могут сближаться (рис. *г*); нижний конец закреплен жестко, верхний имеет «плавающую заделку» (рис. *д*).



Заметим, что чем меньше μ, тем больше критическая сила, а следовательно, и допускаемая сжимающая нагрузка. Например, сжимающая нагрузка стержня, жестко защемленного обоими концами ($\mu = 0{,}5$), может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, защемленного одним концом ($\mu = 2$).

Вывод формулы Эйлера основан на законе Гука, который справедлив только до предела пропорциональности. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда.

Формулу Эйлера можно применять только при выполнении условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

где $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала стержня. Следовательно, должно быть

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{пред}.$$

Величину, стоящую в правой части неравенства, называют *предельной гибкостью*. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня.

Условие применимости формулы Эйлера можно записать так:

$$\lambda \geq \lambda_{пред},$$

т.е. формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости.

Определим значение $\lambda_{пред}$ для низкоуглеродистой стали Ст3, для которой $\sigma_{пц} = 200$ МПа, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100.$$

Для стержней из низкоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость $\lambda \geq 100$.

Аналогично можно определить значения предельной гибкости для других материалов. В частности, для чугуна $\lambda_{пред} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{пред} = 110$.

В тех случаях, когда гибкость стержней меньше предельной, формула Эйлера становится неприменимой и при расчетах пользуются эмпирической формулой Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где *a* и *b* — коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по таблицам справочников.

В частности, для стали Ст3 при гибкостях $\lambda = 40 \ldots 100$ принимают $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа. При гибкостях $\lambda < 40$ стержни рассчитывают на сжатие, т. е. по формуле

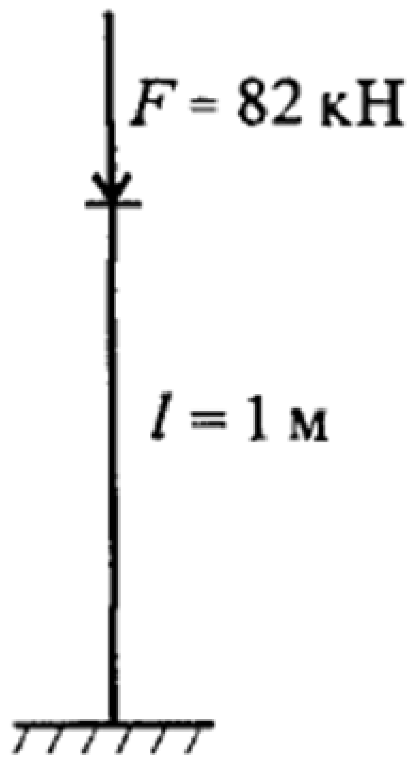
$$\sigma_c = \frac{F}{A}.$$

Итак, при малых значениях λ ($\lambda < 40$) стержни из низкоуглеродистой стали рассчитывают на простое сжатие; при средних ($40 \le \lambda < 100$) расчет ведут по формуле Ясинского, а при больших ($\lambda \ge 100$) — по формуле Эйлера.

График зависимости критического напряжения от гибкости для стержней из низкоуглеродистой стали изображен на рисунке.

Расчеты прямолинейных стержней на устойчивость

Проверить устойчивость стержня. Стержень длиной *l* защемлен одним концом, сечение – швеллер № 16, материал – Ст-3, запас устойчивости трехкратный. Стержень нагружен сжимающей силой F.



Определяем основные геометрические параметры сечения стержня по ГОСТ 8240-89.

Швеллер №16: площадь сечения 18,1 см^2; минимальный осевой момент сечения 63,3 см^4; минимальный радиус инерции сечения i_{min}=1,87 см.

Определяем категорию стержня в зависимости от гибкости.

Предельная гибкость для материала Ст-3:

$$\lambda_{\text{пред}} = 100.$$

Расчетная гибкость стержня при длине:

$$l = 1\,\text{м} = 1000\,\text{мм}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1000}{18,7} = 106,95.$$

Рассчитываемый стержень – стержень большой гибкости, расчет ведем по формуле Эйлера.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad F_{кр} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 63{,}3 \cdot 10^4}{(2 \cdot 1000)^2} = 312\,000\,\text{Н} = 312\,\text{кН}.$$

Допускаемая нагрузка на стержень:

$$[F] = F_{кр}/[s_y]$$

$$[F_y] = \frac{312}{3} = 105{,}5\,\text{кН}.$$

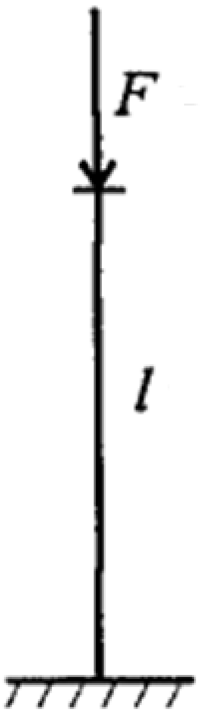
$$F \leqslant [F_y];$$

$$82\,\text{кН} < 105{,}5\,\text{кН}.$$

Устойчивость стержня обеспечена.

Задание

Проверить устойчивость стержня. Стержень длиной *l* защемлен одним концом, сечение – швеллер № 16, материал – Ст-3, запас устойчивости трехкратный. Стержень нагружен сжимающей силой F.



№ варианта	F, кН	l, м	№ варианта	F, кН	l, м
1	80	1	15	75	1,1
2	81	0,9	16	74	1,2
3	82	0,8	17	73	1,3
4	83	0,7	18	72	1,25
5	84	0,75	19	71	1,35
6	85	0,85	20	70	0,8
7	86	0,95	21	91	0,85
8	87	1,1	22	92	1
9	88	1,2	23	93	0,9
10	89	1,3	24	94	0,8
11	90	1,25	25	95	0,7
12	79	1,35	26	96	0,75
13	78	0,8	27	97	0,85
14	77	0,85	28	98	0,95